

고지우의 난문현답

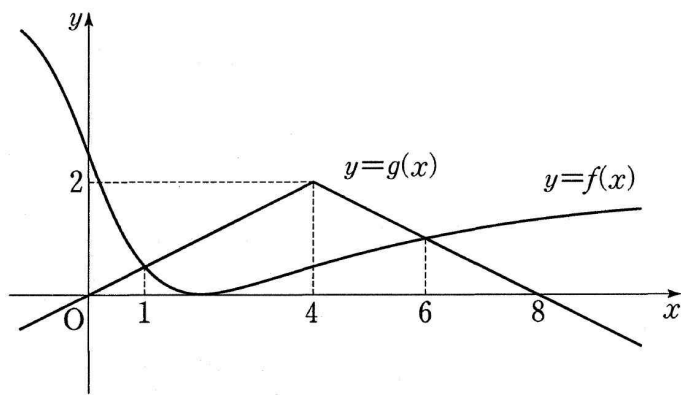
[기출 + 킬러]

제 1 회

1. 2016년 6월 평가원
2. 2016년 6월 평가원
3. 2017년 수능
4. 2016년 6월 평가원
5. 마약N제 미적분 II
6. 마약N제 미적분 II
7. 마약N제 미적분 II
8. 2018년 사관학교
9. 2017년 6월 평가원
10. 2017년 7월 교육청
11. 마약N제 기하와 벡터
12. 2016년 10월 교육청
13. 2018년 사관학교
14. 2017년 수능
15. 2015년 경찰대

1. 함수 $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2 + 4}$ 와 함수 $g(x) = \frac{4 - |x - 4|}{2}$ 의

그래프가 그림과 같다.



$0 \leq a \leq 8$ 인 a 에 대하여 $\int_0^a f(x) dx + \int_a^8 g(x) dx$ 의 최솟값은?

- ① $14 - 5\ln 5$ ② $15 - 5\ln 10$ ③ $15 - 5\ln 5$
 ④ $16 - 5\ln 10$ ⑤ $16 - 5\ln 5$

[추가문항 1]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 $\int_1^{2x+1} f(t) dt = \ln(x^2 + a)$ 를 만족시킬 때,

$a + f(3)$ 의 값은? (단, a 는 양의 상수이다.)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가
상수 a ($0 < a < 2\pi$)와 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을
만족시킨다.

$$(가) \quad f(x) = f(-x)$$

$$(나) \quad \int_x^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

닫힌 구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ 에서 두 실수 b, c 에 대하여

$$f(x) = b \cos(3x) + c \cos(5x) \text{ 일 때 } abc = -\frac{q}{p}\pi \text{ 이다.}$$

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[추가문항 2]

이차함수 $f(x)$ 가

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx = 4$$

를 만족시킬 때, $f(2) - f(-2)$ 의 값은?

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

3. 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 증가하는 연속함수 $f(x)$ 가

$$\int_0^1 f(x)dx = 2, \quad \int_0^1 |f(x)|dx = 2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$ 가

$$F(x) = \int_0^x |f(x)|dx \quad (0 \leq x \leq 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$ 의 값은?

- ① $4 - \sqrt{2}$ ② $2 + \sqrt{2}$ ③ $5 - \sqrt{2}$
 ④ $1 + 2\sqrt{2}$ ⑤ $2 + 2\sqrt{2}$

[추가문항 3]

$x > 0$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$\int_1^x (t-x)f(t)dt = k - x + \ln x$$

를 만족시킬 때, $f(k)$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 상수이다.)

4. 실수 a 와 함수 $f(x) = \ln(x^2 + 1) - c$ ($c > 0$ 인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (m 은 자연수)이다. $a = \alpha_1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 와 상수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값을 갖는다.

(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx = k\alpha_m \int_0^1 |f(x)|dx$

$mk \times e^c$ 의 값을 구하시오.

[추가문항 4]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대해 곡선 $y = f(x)$ 가 변곡점 $(0, 1)$ 을 가지고 점 $(-1, 0)$ 을 지날 때, $8 \int_{-2}^0 \{|(f \circ f)(x)| \times f'(x)\}dx$ 의 값을 구하시오.

[추가문항 5]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x) = f'(x)$

(나) $f(0) = 0$, $f(2) = 3$

(다) $\int_0^2 f(x) dx = -4$

$\int_{-2}^0 \{xf'(x)\} dx$ 의 값을 구하시오.

[추가문항 6]

x 에 대한 부등식 $x^{\frac{1}{n}} \ln x \geq p$ (n 은 자연수)가 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하도록 하는 실수 p 의 최댓값을 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은?

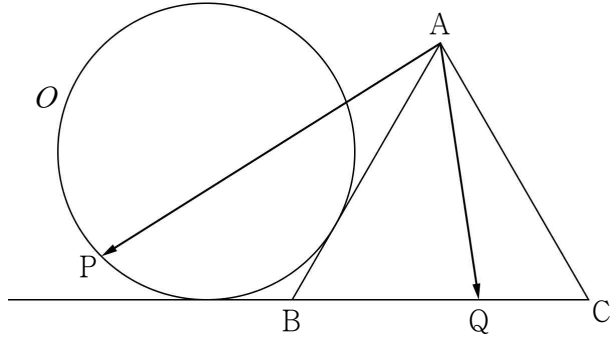
- ① $-\frac{110}{e}$ ② $-\frac{55}{e}$ ③ 0 ④ $\frac{55}{e}$ ⑤ $\frac{110}{e}$

[추가문항 7]

달린 구간 $[1, 6]$ 에서 $(x-4)^2 e^{x-2} \leq k$ 을 만족하는 k 의 최솟값을 구하면?

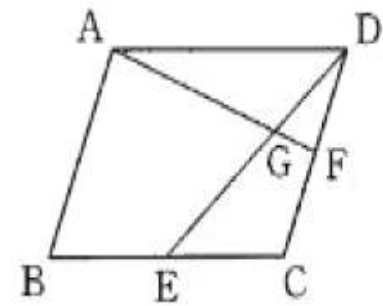
- ① $4e$ ② $4e^2$ ③ $4e^3$ ④ $4e^4$ ⑤ $4e^5$

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC와 반지름의 길이가 1이고 선분 AB와 직선 BC에 동시에 접하는 원 O가 있다. 원 O 위의 점 P와 선분 BC 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이고, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.)



[추가문항 8]

그림과 같은 평행사변형 ABCD에 대하여 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 의 중점을 각각 E, F라 하고 $\overline{DE}$ 와 $\overline{AF}$ 의 교점을 G라 하자. $\overline{AG} = m\overline{AB} + n\overline{AD}$ 를 만족시키는 두 실수 m, n 에 대하여, $m+n$ 의 값은?



- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

9. 좌표평면에서 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A , 중심이 O 이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B 라 할 때, 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

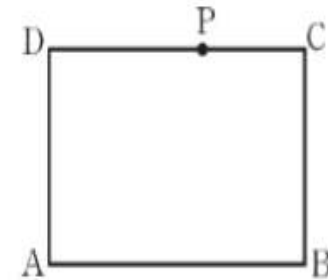
$$(가) \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$$

$$(나) \quad |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 20$$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최솟값은 m 이고 이 때 $|\overrightarrow{OP}| = k$ 이다. $m + k^2$ 의 값을 구하시오.

[추가문항 9]

그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AD} = 2$ 인 직사각형 $ABCD$ 가 있다. 점 P 가 선분 CD 위를 움직일 때, $|\overline{AB} + \overline{AP}|$ 의 최댓값과 $|\overline{CB} - \overline{CP}|$ 의 최솟값의 합은?



- ① $\sqrt{10} + 1$ ② $2(\sqrt{10} - 1)$ ③ $2(\sqrt{10} + 1)$
 ④ $3(\sqrt{10} - 1)$ ⑤ $3(\sqrt{10} + 1)$

10. 평면 위에 반지름의 길이가 13인 원 C 가 있다. 원 C 위의 두 점 A, B 에 대하여 $\overline{AB} = 24$ 이고, 이 평면 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $|\overrightarrow{AP}| = 5$
 (나) $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{AP}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때,
 $5\cos\theta$ 는 자연수이다.

원 C 위의 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값을 구하시오.

[추가문항 10]

두 벡터 $\vec{a} = (x, y-4)$, $\vec{b} = (y, 3-x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

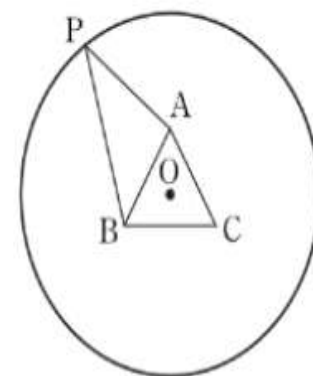
- (가) x, y 는 실수이다.
 (나) $|\vec{a}| \leq 5$, $|\vec{b}| \leq 5$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 최댓값은?

- ① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ③ $10\sqrt{3}$ ④ $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $15\sqrt{3}$

[추가문항 11]

그림과 같이 중심이 점 O 이고 반지름의 길이가 4인 원과 무게중심이 점 O 이고 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC 가 있다. 원 위의 점 P 에 대하여 $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 의 최댓값은?



- ① $\frac{46 + \sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{50 + \sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{46 + 4\sqrt{3}}{3}$
 ④ $\frac{50 + 4\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{46 + 8\sqrt{3}}{3}$

12. 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i 번째 ($i=1, 2, \dots, 9$) 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i 라 하자. $1 < p < q < 9$ 인 두 자연수 p, q 에 대하여 a_i 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $1 \leq i < p$ 이면 $a_i < a_{i+1}$ 이다.

(나) $p \leq i < q$ 이면 $a_i > a_{i+1}$ 이다.

(다) $q \leq i < 9$ 이면 $a_i < a_{i+1}$ 이다.

$a_1=2, a_p=8$ 인 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

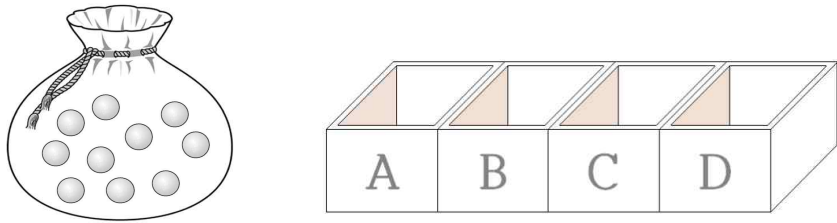
[추가문항 12]

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하시오.

- (가) $f(3)$ 은 3의 배수이다.

(나) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.

13. 그림과 같이 10개의 공이 들어 있는 주머니와 일렬로 나열된 네 상자 A, B, C, D가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내어 이웃한 두 상자에 각각 한 개씩 넣는 시행을 5회 반복할 때, 네 상자 A, B, C, D에 들어 있는 공의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하자. a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? (단, 상자에 넣은 공은 다시 꺼내지 않는다.)



- ① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

[추가문항 13]

좌표평면 위에서 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 직선 $y=mx+n$, $y=ax+b$ 를 정하는 경우의 수는?

- (가) m, n, a, b 는 모두 짝수인 자연수이다.
(나) $m+n+a+b=24$ 이다.

- ① 160 ② 164 ③ 168 ④ 172 ⑤ 176

14. 확률변수 X 는 평균이 m , 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

m 이 자연수일 때, $P(17 \leq X \leq 18)$ 의 값을 오른쪽 정규분포표를 이용하여 구한 것은?

- ① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062
④ 0.078 ⑤ 0.097

[추가문항 14]

확률변수 X 는 정규분포 $N(100, 2^2)$ 을 따른다. 실수 t 에 대하여 $f(t) = P(t \leq X \leq 3+t)$ 라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} f(3n+c) = 0.8413$ 을 만족시키는 상수 c 의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

15. 15 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 뽑을 때, 어느 두 수도 3 이상 차이가 나도록 뽑는 방법의 수는?

- ① 108 ② 120 ③ 126
④ 132 ⑤ 144

[추가문항 15]

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오.

- (가) $f(4) = 4$
(나) $x < 4$ 이면 $f(x) \geq f(4)$ 이다.

[기출 + 킬러 정답]

1. 2
2. 83
3. 4
4. 16
- 5.
- 6.
- 7.
8. 40
9. 7
10. 128
- 11.
12. 243
13. 1
14. 3
15. 3

[추가문항 정답]

1. 3
2. 2
3. 1
4. 277
5. -10
6. 2
7. 5
8. 4
9. 3
10. 4
11. 5
12. 252
13. 1
14. 95
15. 972