

I. 지수함수와 로그함수

01. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 10

$$\begin{aligned} 2 - \log_2\{4f(x)\} &= 2 - \{\log_2 4 + \log_2 f(x)\} \\ &= 2 - \{2 + \log_2 f(x)\} = -\log_2 f(x) \text{ 이고} \end{aligned}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} g(x) = -\log_2 g(x) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} 2 - \log_2\{4f(x)\} &\leq \log_{\frac{1}{2}} g(x) \\ &\Leftrightarrow -\log_2 f(x) \leq -\log_2 g(x) \\ &\Leftrightarrow \log_2 f(x) \geq \log_2 g(x) \\ &\Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 0 < g(x) \leq f(x)$$

달한 구간 $[-2, 6]$ 에서 부등식 $0 < g(x)$ 를 만족시키는 x 값의 범위는

$$0 < x \leq 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

달한 구간 $[-2, 6]$ 에서 부등식

$$g(x) \leq f(x) \text{를 만족시키는 } x \text{ 값의 범위는}$$

$$-1 \leq x \leq 4 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 값의 범위는

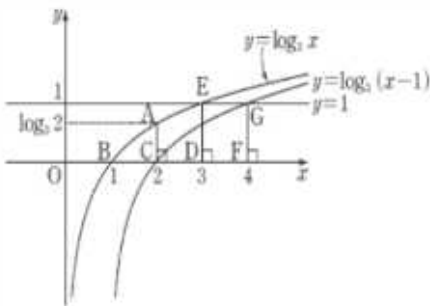
$$0 < x \leq 4 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

따라서 $\textcircled{3}$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 값은 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ 이다.}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②



ㄱ. 곡선 $y = \log_3 x$ 와 직선 $x = 2$ 의 교점

을 A라 하면 점 A의 좌표는 $(2, \log_3 2)$ 이다. 두 점 $(1, 0), (2, 0)$ 을 각각 B, C라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 1 \times \log_3 2 = \frac{1}{2} \log_3 2$$

이때 로그함수 $y = \log_3 x$ 는 위로 볼록하므로

$$S_1 > \frac{1}{2} \log_3 2 \text{ (거짓)}$$

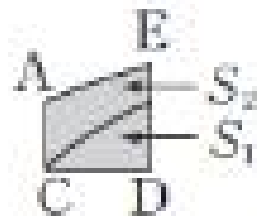
ㄴ. 함수 $y = \log_3 (x-1)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y = \log_3 x$ 와 x 축 및 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y = \log_3 (x-1)$ 과 x 축 및 직선 $x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 따라서 $S_1 + S_2$ 의 값은 곡선 $y = \log_3 x$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 2, x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

한편, 두 점 $(3, 0), (3, 1)$ 을 각각 D, E라 하면 사다리꼴 ACDE의 넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times (\overline{AC} + \overline{DE}) \times \overline{CD} \\ &= \frac{1}{2} \times (\log_3 2 + 1) = \frac{1 + \log_3 2}{2} \end{aligned}$$

이때 로그함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프는 위

$$\text{로 볼록하므로 } S_1 + S_2 > \frac{1 + \log_3 2}{2} \text{ (참)}$$

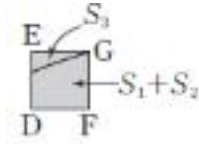


ㄷ. 함수 $y = \log_3 (x-1)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y = \log_3 x$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 2, x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y = \log_3 (x-1)$ 과 x 축 및 두 직선 $x = 3, x = 4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 따라서 두 점 $(4, 0), (4, 1)$ 을

각각 F, G 라 하면 $S_1 + S_2 + S_3$ 의 값은 정사각형 EDFG 의 넓이와 같다.

따라서 $S_1 + S_2 + S_3 = 1$ 이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ 이다.



2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

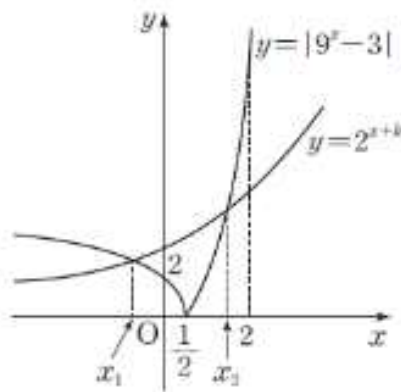
$y = |9^x - 3|$ 에 $y = 0$ 을 대입하면

$$|9^x - 3| = 0$$

$$9^x - 3 = 0, 9^x = 3^{2x} = 3, x = \frac{1}{2}$$

$x = 0$ 을 대입하면 $y = |9^0 - 3| = 2$ 이다.

따라서 두 곡선 $y = |9^x - 3|$, $y = 2^{x+k}$ 가 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표 x_1, x_2 가 $x_1 < 0, 0 < x_2 < 2$ 를 만족시키는 경우는 그림과 같다.



즉, $x = 0$ 일 때

$$2^{0+k} = 2^k > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$x = 2$ 일 때

$$2^{2+k} = 4 \times 2^k < |9^2 - 3| = 78$$

$$2^k < \frac{39}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

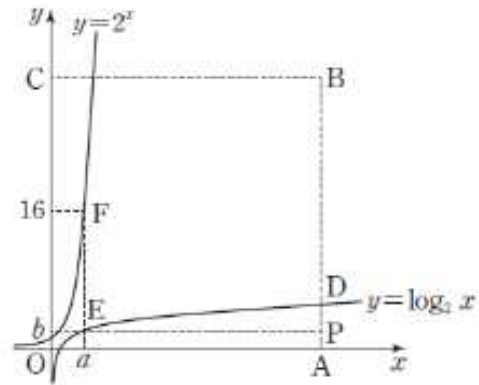
$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{에서 } 2 < 2^k < \frac{39}{2}$$

따라서 자연수 k 는 2, 3, 4이므로 그 합은 9이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

그림과 같이 선분 AD를 2 : 3으로 내분하는 점을 P 라 하자.



점 F의 좌표를 $F(a, 16)$ 이라 하면 $2^a = 16$ 에서 $a = 4$

점 E와 점 F의 x 좌표가 서로 같으므로 점 E의 좌표를 $E(4, b)$ 라 하면 $\log_2 4 = b$ 에서 $b = 2$

점 E와 점 P의 y 좌표가 같으므로 점 P의 좌표를 $P(c, 2)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 3$ 이므로 점 D의 좌표는 $D(c, 5)$ 이다.

점 D는 곡선 $y = \log_2 x$ 위에 있으므로

$$\log_2 c = 5 \text{에서 } c = 32$$

따라서 두 점 D, F의 좌표는 각각 $D(32, 5), F(4, 16)$ 이므로

직선 DF의 기울기는

$$\frac{16-5}{4-32} = -\frac{11}{28}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] 6

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$x-5 \leq -2$$

$$x \leq 3$$

따라서 모든 자연수 x 의 값은 1, 2, 3이고 그 합은 $1+2+3=6$ 이다.



[정답] ②

$$2\log_2|x-1| \leq 1 - \log_2 \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1 \text{이므로 } \log_2|x-1| \leq 1 \text{이다.}$$

$|x-1| \leq 2$ 에서 $x = -1, 0, 1, 2, 3$ 이고,
진수조건에 의하여 $|x-1| \neq 0$ 에서 $x \neq 1$ 이
므로 만족하는 정수 x 의 개수는 4이다.



[정답] ③

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = \log_{2^{-1}}(x-2) = -\log_2(x-2)$$

이므로

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > 1 - \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(x-2) > \log_2 2 - \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2) < \log_2 \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x-2 < \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

따라서

$$\alpha = 2, \beta = 4 \text{이므로 } \alpha + \beta = 2 + 4 = 6$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

$A(0, 1), B(3, a^3), C(3, 0)$ 이므로

$$\overline{OA} = 1, \overline{BC} = a^3, \overline{OC} = 3 \text{이다.}$$

사각형 $OCBA$ 는 사다리꼴이므로 그 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot (1 + a^3) \cdot 3 = \frac{3}{2}(1 + a^3)$$

이때 $S = 2$ 에서

$$\frac{3}{2}(1 + a^3) = 2, a^3 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

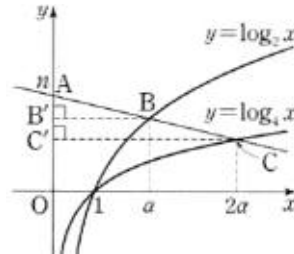
$$\therefore a = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 5

$\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로 점 B 의 x 좌표를
 $\alpha (1 < \alpha < 1000 \text{인 자연수})$ 라 하면 점 C
의 x 좌표는 2α 이다.

$$\therefore B(\alpha, \log_2 \alpha), C(2\alpha, \log_4 2\alpha)$$



그림과 같이 두 점 B, C 에서 y 축에 내린 수선의 발을 각각 B', C' 이라 하면

$\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB'} = \overline{B'C'}$ 이므로

$$n - \log_2 \alpha = \log_2 \alpha - \log_4 2\alpha$$

$$n - \log_2 \alpha = \log_2 \alpha - \frac{1}{2} \log_2 2\alpha$$

$$n - \log_2 \alpha = \log_2 \alpha - \frac{1}{2}(1 + \log_2 \alpha)$$

$$\frac{3}{2} \log_2 \alpha = n + \frac{1}{2}$$

$$\log_2 \alpha = \frac{2n+1}{3}$$

$$\therefore \alpha = 2^{\frac{2n+1}{3}}$$

이때 α 는 $1 < \alpha < 1000$ 인 자연수이므로
 $2n+1 = 3k (k = 1, 2, 3, \dots, 9)$ 이어야 한다.

따라서 자연수 n 은 1, 4, 7, 10, 13 이고
그 개수는 5이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 8

$y = 2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이
동한 그래프의 식은

$$y = 2^{-x}$$

$y = 2^{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m
만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그
래프의 식은

$$y - n = 2^{-(x-m)}$$

$$\therefore y = 2^{-x+m} + n \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또한, } y = \frac{4}{2^x} - 6 = 4 \cdot 2^{-x} - 6$$

$$\therefore y = 2^{-x+2} - 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 이 일치해야 하므로 $m=2, n=-6$

$$\therefore m-n = 2 - (-6) = 8$$

2018수능대비 EBS 연계 예상문항 4

[정답] ③

$g(x) = \log 6x = \log 2 + \log 3x = \log 2 + f(x)$
이므로 곡선 $y = g(x)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 를 y 축의 방향으로 $\log 2$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\overline{AB} = \overline{CD} = \log 2$ 이고 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
이므로 사각형 BACD는 평행사변형이다.

$y = \log 3x$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$\log 3x = 0 \text{에서 } 3x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}$$

그러므로 점 A의 좌표는 $(\frac{1}{3}, 0)$ 이다.

따라서 사각형 BACD의 넓이는

$$(k - \frac{1}{3}) \times \log 2 = \log 8$$

$$k - \frac{1}{3} = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{3 \log 2}{\log 2} = 3$$

$$\therefore k = \frac{10}{3}$$

02. 지수함수와 로그함수의 미분

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x = \infty \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2 x + 4}{\log_3 x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2 x + 4}{\frac{\log_2 x}{\log_2 3} + 2}$$

$$= \log_2 3 \times \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2 x + 4}{\log_2 x + 2 \log_2 3}$$

$$= \log_2 3 \times \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{\log_2 x}}{1 + \frac{2 \log_2 3}{\log_2 x}} = \log_2 3 \times 1 = \log_2 3$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \frac{f(1-2h) - f(1)}{-h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \end{aligned}$$

$$+ 2 \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h}$$

$$= f'(1) + 2 \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t}$$

($-2h = t$ 라 하면 $h \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$)

$$= f'(1) + 2 \times f'(1) = 3f'(1)$$

$$f'(x) = (x)' \times 2^x + x \times (2^x)'$$

$$= 1 \times 2^x + x \times 2^x \ln 2 = (1 + x \ln 2) 2^x$$

$$\text{이므로 } f'(1) = 2(1 + \ln 2)$$

따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h} \\ &= 3f'(1) = 3 \times 2(1 + \ln 2) = 6(1 + \ln 2) \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

$$f(x) = \log_3(3x^2) = \log_3 3 + 2 \log_3 x$$

$$= 1 + \frac{2}{\ln 3} \ln x \quad (x > 0)$$

에서

$$f'(x) = \frac{2}{\ln 3} \times \frac{1}{x}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(1) \end{aligned}$$

$$= 2 \times \frac{2}{\ln 3} \times 1$$

$$= \frac{4}{\ln 3}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{a(x-1)} - 3x + b}{\log_2 x} = 3 \ln 2 \text{ 에서 } x \rightarrow 1 \text{ 일}$$

때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{e^{a(x-1)} - 3x + b\} = 1 - 3 + b = 0$$

에서

$$b = 2$$

$$f(x) = e^{a(x-1)} - 3x, \quad g(x) = \log_2 x \text{ 로 놓으면}$$

$$f(1) = -2, \quad g(1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{a(x-1)} - 3x + b}{\log_2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{a(x-1)} - 3x + 2}{\log_2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{e^{a(x-1)} - 3x + 2}{x-1} \times \frac{x-1}{\log_2 x} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{x-1}{g(x) - g(1)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{g(x) - g(1)}{x-1}}$$

$$= f'(1) \times \frac{1}{g'(1)} = 3 \ln 2$$

$$f(x) = e^{a(x-1)} - 3x = e^{-a} \times (e^a)^x - 3x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = e^{-a} \times (e^a)^x \times \ln e^a - 3$$

$$= ae^{-a} \times e^{ax} - 3$$

$$\text{또 } g(x) = \log_2 x = \frac{1}{\ln 2} \times \ln x \text{ 에서}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{x} \text{ 이므로}$$

$$f'(1) \times \frac{1}{g'(1)} = (ae^{-a} \times e^a - 3) \times \ln 2$$

$$= (a - 3) \ln 2$$

$$= 3 \ln 2$$

$$\text{에서 } a - 3 = 3, \quad a = 6$$

$$\text{따라서 } a + b = 6 + 2 = 8$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ②

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\ln(1+3x)}$$

$$= \frac{6}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{6x} \times \frac{3x}{\ln(1+3x)}$$

$$= 2$$

EBS교재

[정답] ③

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\ln(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{6x} - 1}{6x} \times 6}{\frac{\ln(2x+1)}{2x} \times 2}$$

$$= \frac{6}{2} = 3$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ④

$$f'(x) = e^x(2x+1) + 2e^x \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 5e \text{ 이다.}$$

EBS교재

[정답] ②

$$f(x) = a^x + (\ln 2)x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = a^x \ln a + \ln 2 \quad f'(0) = a^0 \ln a + \ln 2 = 0$$

$$\text{에서 } \ln a = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2} \quad \text{즉, } a = \frac{1}{2}$$

따라서

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} + \ln 2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2 + \ln 2$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x\right\} \ln 2$$

이므로

$$f'(-1) = \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right\} \ln 2 = (1-2) \ln 2 = -\ln 2$$

EBS연계 기출분석 3

[정답] ③

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = 3$$



EBS교재

[정답] ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{x+b} = 2 \text{에서 } 0 \text{이 아닌 극한값}$$

이 존재하고 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(ax+1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+b) = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

즉, $b = 0$ 한편, $a = 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(ax+1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{x} = 0 \neq 2$$

따라서 $a \neq 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{x+b}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = a \times 1 = a$$

즉, $a = 2$

따라서 $a+b = 2+0 = 2$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\{1+f(2x)\}}{x} = 10 \text{이고, } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln\{1+f(2x)\} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(2x) = 0$ 이므로 $t = f(2x)$ 로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\{1+f(2x)\}}{f(2x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln e = 1$$

따라서 $x = 2y$ 로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(2y)}{2y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(2y)}{\ln\{1+f(2y)\}} \cdot \frac{\ln\{1+f(2y)\}}{y} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1 \times 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

$$e \ln x \leq f(x) \leq e^x - e \text{에서}$$

$$x > 1 \text{일 때, } \frac{e \ln x}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{e^x - e}{x-1}$$

$$0 < x < 1 \text{일 때, } \frac{e^x - e}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{e \ln x}{x-1}$$

한편, $g(x) = e \ln x$, $h(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$g'(x) = \frac{e}{x}, \quad h'(x) = e^x$$

이고, $g(1) = 0$, $h(1) = e$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1}$$

$$= g'(1) = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x-1}$$

$$= h'(1) = e$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = e \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\}$$

$$= e \times \frac{1}{2} = \frac{e}{2}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ③

$\triangle PAB$ 의 넓이

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \ln t = \frac{1}{2}(e-1) \ln t \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(e-1) \ln t}{2(t-1)}$$

$$= \frac{e-1}{2} \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\ln t}{t-1}$$

$$= \frac{e-1}{2} \times 1 \left(\because \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1 \right)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{t-1} = \frac{e-1}{2}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 10

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$ 가 점 (1, 4)를 지나므로

$$f(1)=4$$

$$\text{즉, } a \log_b 1 + c = 4 \text{ 이므로}$$

$$c=4$$

또, 곡선 $y=f(x)$ 가 점 (b, 6)을 지나므로 $f(b)=6$

$$\text{즉, } a \log_b b + 4 = 6 \text{ 이므로}$$

$$a=2$$

$$f(x)=2 \log_b x + 4 \text{ 에서 } f'(x)=\frac{2}{x \ln b} \text{ 이므로}$$

$$f'(1)=\frac{2}{\ln b}$$

$$\text{조건 (나)에서 } f'(1)=\frac{1}{\ln 2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{\ln b}=\frac{1}{\ln 2}$$

$$\ln b=2 \ln 2=\ln 4 \text{ 이므로}$$

$$b=4$$

$$\text{따라서 } a+b+c=2+4+4=10$$

II. 삼각함수

3. 삼각함수의 뜻과 그래프

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

$$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x \text{ 이므로 주어진 방정식}$$

$$\sin x (2 \sin x - a) = 0$$

$$\text{따라서 } \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{a}{2}$$

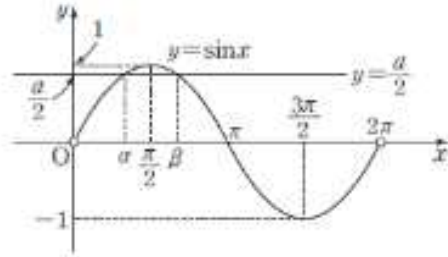
$$0 < x < 2\pi \text{ 에서}$$

$$\text{방정식 } \sin x = 0 \text{ 의 실근은 } x = \pi$$

$$0 < \frac{a}{2} < 1 \text{ 이므로 } 0 < x < 2\pi \text{ 에서}$$

방정식 $\sin x = \frac{a}{2}$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이 두 실근을 α, β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$)라 하면 $\alpha + \beta = \pi$ ㉠ 가 성립한다.



세 수 α, β, π 가 이 순서대로 등차수열을 이루어야 하므로 등차중항의 성질에 의하여 $2\beta = \alpha + \pi$ ㉡

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{이때 } \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이므로}$$

$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{2\pi}{3}$ 는 방정식 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 두 실근이다.

$$\text{따라서 } \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 에서 } a = \sqrt{3}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

함수 $y = a \cos (bx - c)$ 의 최댓값이 2이고 $a < 0$ 이므로 $a = -2$

함수 $y = a \cos (bx - c)$ 의 주기가 π 이고

$$b > 0 \text{ 이므로 } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{b} = \pi$$

따라서 $b = 2$ 이다.

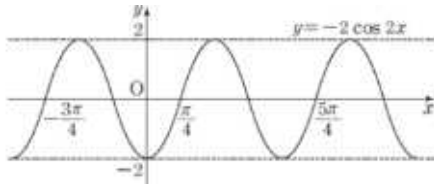
이때 주어진 함수는 $y = -2 \cos (2x - c)$ 이고

$$y = -2 \cos (2x - c) = -2 \cos \left\{ 2 \left(x - \frac{c}{2} \right) \right\}$$

이므로

함수 $y = -2 \cos 2x$ 의 그래프를 x 축 방향으로 $\frac{c}{2}$ 만큼 평행 이동한 것과 같다.

함수 $y = -2 \cos 2x$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 함수 $y = -2 \cos(2x - c)$ 의 그래프는
함수 $y = -2 \cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방
향으로 $\frac{3\pi}{4} + n\pi$ (n 은 정수)만큼 평행 이동
한 것과 같다.

따라서 양수 $\frac{c}{2}$ 의 최솟값은 $\frac{3\pi}{4}$ 이므로 c
의 최솟값은 $\frac{3\pi}{2}$ 이다.

따라서 $a + b + c$ 의 최솟값은

$$-2 + 2 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 153

반지름의 길이가 줄어든 부채꼴의 반지름
의 길이를 r_n 이라 하자.

반지름의 길이가 $\frac{100-n}{100}$ 배로 줄었으므로
 $r_n = \frac{100-n}{100}r$

두 부채꼴의 넓이는 같으므로

$$\frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r_n l_n$$

$$rl = \frac{100-n}{100}r l_n$$

$$\frac{l}{l_n} = \frac{100-n}{100}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} f(n) &= \sum_{n=1}^{50} \frac{100-n}{100} = \frac{99+98+\cdots+50}{100} \\ &= \frac{50(99+50)}{100 \times 2} = \frac{149}{4} \end{aligned}$$

따라서 $p = 4$, $q = 149$ 이므로
 $p + q = 4 + 149 = 153$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 63

$$\cos \frac{(t-1)\pi}{6} < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 에서}$$

$$x = \frac{(t-1)\pi}{6} \text{ 로 놓으면}$$

$$1 \leq t < 13 \text{ 이므로 } 0 \leq x < 2\pi$$

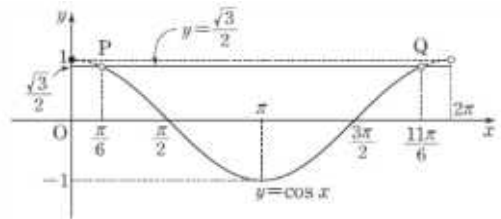
$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 에서 그림과 같이}$$

함수 $y = \cos x$ 의 그래프와

$$\text{직선 } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이 만나는 두 점을 P, Q}$$

라 하면 두 점 P, Q의 x 좌표는 각각

$$\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \text{ 이다.}$$



$$\text{부등식 } \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 의 해는 함수}$$

$$y = \cos x \text{의 그래프가 직선 } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 보다}$$

아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$$

$$x = \frac{(t-1)\pi}{6} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{(t-1)\pi}{6} < \frac{11\pi}{6}$$

$$2 < t < 12$$

따라서 자연수 t 의 값은 3, 4, 5, ..., 11이
므로 조건을 만족시키는 모든 자연수 t 의
값의 합은 $3 + 4 + 5 + \cdots + 11 = 63$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ⑤

$$\sin \frac{7\pi}{3} = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

EBS교재

[정답] ①

$$\frac{11\pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3} = 2 \times 2\pi + (-\frac{\pi}{3}) \text{이므로}$$

$$\sin \frac{11\pi}{3} = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

이차방정식 $3x^2 - 6x \tan \theta + 1 = 0$ 의
판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3 \tan \theta)^2 - 3 = 9 \tan^2 \theta - 3 > 0$$

따라서 $\tan^2 \theta > \frac{1}{3}$ 에서

$$\tan \theta < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } \tan \theta > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\tan \theta > 0$ 이므로

$$\tan \theta > \frac{\sqrt{3}}{3} \dots\dots ㉠$$

따라서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 부등식 ㉠의 해

$$\text{는 } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

$0 < x < \pi$ 에서 두 함수

$y = \sqrt{3} \sin x, y = -\tan x$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표를 α ($0 < \alpha < \pi$)라 하면

$$\sqrt{3} \sin \alpha = -\tan \alpha$$

$$\text{즉, } \sqrt{3} \sin \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \dots\dots ㉠$$

$0 < \alpha < \pi$ 일 때, $\sin \alpha > 0$ 이므로

$$\text{㉠에서 } \sqrt{3} = -\frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{즉, } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이 때

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

x 에 대한 이차방정식 $3x^2 + 4x - 8 = 0$ 의
두 실근이 $\csc \theta, \sec \theta$ 이므로 이차방정식의
근과 계수의 관계에 의하여

$$\csc \theta + \sec \theta = -\frac{4}{3} \dots\dots ㉠$$

$$\csc \theta \sec \theta = -\frac{8}{3} \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠에서 } \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{4}{3} \dots\dots ㉢$$

$$\text{㉡에서 } \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{8}{3} \text{이므로}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣에서

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \dots\dots ㉤$$

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ⑤

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } -1 < \sin \theta < 1,$$

즉 $0 \leq \sin^2 \theta < 1$ 이므로 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \theta)^{2n-1} \text{은 첫째항이 } \sin \theta \text{이고, 공}$$

비가 $\sin^2 \theta$ 인 수렴하는 등비급수이다.

$$\text{즉, } \sum_{n=1}^{\infty} (\sin \theta)^{2n-1} = \frac{\sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{3}{8}$$

$$8 \sin \theta = 3(1 - \sin^2 \theta)$$

$$3 \sin^2 \theta + 8 \sin \theta - 3 = 0$$

$$(3 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 3) = 0$$

$$-1 < \sin \theta < 1 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{3}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$$

4. 삼각함수의 미분

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는

함수는 $y = f(x - \frac{\pi}{3})$ 이므로 모든 실수 x 에

$$\text{대하여 } f(x - \frac{\pi}{3}) = af(x) + bf(x + \frac{\pi}{2})$$

즉, $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = a \sin x + b \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 가 성립해야 한다.

이때 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ 이고,

$$\begin{aligned} \sin(x - \frac{\pi}{3}) &= \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \quad \text{이므로} \end{aligned}$$

모든 실수 x 에 대하여
등식

$$a \sin x + b \cos x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

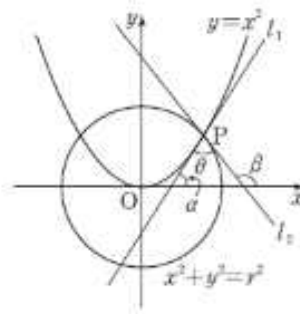
가 성립해야 한다.

따라서 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이어야 하므로

$$\frac{b}{a} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①



점 P 의 좌표를 (a, a^2) ($a > 0$)이라 하고 두 직선 l_1, l_2 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하자.

$y = x^2$ 에서 $y' = 2x$ 이므로 직선 l_1 의 기울기는 $\tan \alpha = 2a$

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 (a, a^2) 에서의 접선의 방정식은 $ax + a^2y = r^2$ 이므로 직선 l_2 의 기울기는 $\tan \beta = -\frac{1}{a}$

이때 $\alpha + \theta = \beta$ 에서 $\theta = \beta - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{-\frac{1}{a} - 2a}{1 + (-\frac{1}{a}) \times 2a} = \frac{\frac{1}{a} + 2a}{1 - 2} = \frac{1}{a} + 2a \end{aligned}$$

이때 $a > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a} + 2a \geq \sqrt{\frac{1}{a} \times 2a} = 2\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $\frac{1}{a} = 2a$, 즉 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 성립한다.)

이므로 $\tan \theta$ 의 최솟값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a - \cos 4x)}{x^2}$ 의 값이 존재하고

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(a - \cos 4x) = 0$$

함수 $\sin(a - \cos 4x)$ 는 연속함수이므로

$$\begin{aligned}
& \sin(a-1) = 0 \\
& 0 < a < \pi \text{ 이므로 } a = 1 \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a - \cos 4x)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos 4x)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1 - \cos 4x)}{1 - \cos 4x} \times \frac{1 - \cos 4x}{x^2} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1 - \cos 4x)}{1 - \cos 4x} \times \frac{1 - \cos^2 4x}{x^2(1 + \cos 4x)} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1 - \cos 4x)}{1 - \cos 4x} \times \frac{\sin^2 4x}{x^2(1 + \cos 4x)} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos 4x)}{1 - \cos 4x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2} \\
&\quad \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos 4x} \\
&= 16 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos 4x)}{1 - \cos 4x} \times \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \right)^2 \\
&\quad \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos 4x} \\
&= 16 \times 1 \times 1^2 \times \frac{1}{1+1} = 8 = b \\
&\text{따라서 } a = 1, b = 8 \text{ 이므로} \\
&a + b = 1 + 8 = 9
\end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하므로 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분 가능하다.

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \\
& \lim_{x \rightarrow 0-} (b \cos x - 1) = 1
\end{aligned}$$

$$b - 1 = 1$$

즉, $b = 2$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & (x \geq 0) \\ 2 \cos x - 1 & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $f'(0)$ 의 값이 존재한다

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2 \cosh - 1 - 1}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2 \cosh - 2}{h} \\
&= - \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2(1 - \cosh)}{h} \\
&= - \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2(1 - \cos^2 h)}{h(1 + \cosh)} \\
&= - \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2 \sin^2 h}{h(1 + \cosh)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sinh}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sinh}{1 + \cosh} \\
&= -2 \times 1 \times \frac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + ah + 1 - 1}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + ah}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0+} (h + a) = a
\end{aligned}$$

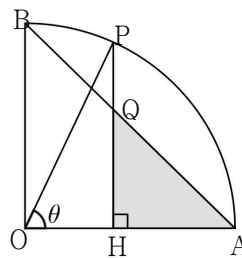
이므로 $a = 0$

따라서 $a = 0, b = 2$ 이므로

$$a + b = 0 + 2 = 2$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ①



$P(\cos \theta, \sin \theta)$ 이므로 $\overline{OH} = \cos \theta$ 이고 $\overline{AH} = 1 - \cos \theta$ 이다.

직각삼각형 OAB 에서 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 이므로

$$\angle OAB = \angle OBA \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때, $\overline{OB} \parallel \overline{PH}$ 이므로

$$\angle OBA = \angle HQA \quad \cdots \textcircled{2}$$

즉, 직각삼각형 HQA 에서

$$\overline{HA} = \overline{HQ}$$

따라서 삼각형 AQH의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)^2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos\theta)^2}{2\theta^4} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos\theta)^2(1 + \cos\theta)^2}{2\theta^4(1 + \cos\theta)^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos^2\theta)^2}{2\theta^4(1 + \cos\theta)^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{2(1 + \cos\theta)^2} \times \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right)^4 \right\} \\ &= \frac{1}{2(1+1)^2} \times 1^4 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

이다.



EBS교재

[정답] ①

직각삼각형 OAQ에서 $\overline{AQ} = \tan\theta$

점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H

라 하면 $\overline{OH} = \cos\theta$, $\overline{AH} = 1 - \cos\theta$

이때 $S(\theta) = \frac{1}{2} \times \tan\theta \times (1 - \cos\theta)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2} \times \tan\theta \times (1 - \cos\theta)}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2} \times \tan\theta \times (1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{\theta^3(1 + \cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2} \times \tan\theta \times \sin^2\theta}{\theta^3(1 + \cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{\tan\theta}{\theta} \times \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos\theta} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



EBS연계 기출분석 2

[정답] 20

$\overline{OD} = x$ 라 하면 $\overline{GD} = x \tan \frac{\theta}{3}$ 이므로

$$f(\theta) = \left(x \tan \frac{\theta}{3} \right)^2 \text{ 이다.}$$

삼각형 ODP에서 $\overline{OP} = x \cos\theta$ 이고

삼각형 OPQ에서

$$\overline{PQ} = \overline{OP} \tan \frac{2\theta}{3} = x \cos\theta \tan \frac{2\theta}{3} \text{ 이므로}$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2} (x \cos\theta)^2 \tan \frac{2\theta}{3} \text{ 이다.}$$

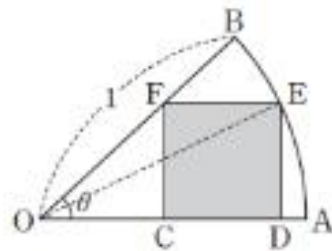
$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\left(x \tan \frac{\theta}{3} \right)^2}{\theta \times \frac{1}{2} x^2 \cos^2\theta \tan \frac{2\theta}{3}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} = k \end{aligned}$$

따라서 $60k = 20$ 이다.



EBS교재

[정답] ④



정사각형 CDEF의 한 변의 길이를 x 라 하면 직각삼각형 OCF에서

$$\tan\theta = \frac{\overline{CF}}{\overline{OC}} = \frac{x}{\overline{OC}} \text{ 이므로 } \overline{OC} = x \cot\theta$$

이때 직각삼각형 ODE에서 피타고라스 정리에 의하여

$$1^2 = (x \cot\theta + x)^2 + x^2 = x^2 \{ (1 + \cot\theta)^2 + 1 \}$$

이므로

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{(1 + \cot\theta)^2 + 1} = \frac{1}{2 + 2\cot\theta + \cot^2\theta} \\ &= \frac{\sin^2\theta}{2\sin^2\theta + 2\sin\theta \cos\theta + \cos^2\theta} \end{aligned}$$

따라서 정사각형 CDEF의 넓이는

$$S(\theta) = x^2 = \frac{\sin^2\theta}{2\sin^2\theta + 2\sin\theta \cos\theta + \cos^2\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(\frac{\sin \theta}{\theta})^2}{2\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1^2}{0+0+1^2} = 1$$

{다른 풀이}

$\overline{OF} = a$ 라 하면 $\overline{FC} = a \sin \theta$ 이므로

$$S(\theta) = a^2 \sin^2 \theta$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} a^2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} (\frac{\sin \theta}{\theta})^2$$

그런데 $\theta \rightarrow 0+$ 이면 점 F는 A에 한없이 가까워진다.

따라서 $\theta \rightarrow 0+$ 이면 $a \rightarrow 1$, 즉 $a^2 \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} a^2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} (\frac{\sin \theta}{\theta})^2$$

$$= 1 \times 1^2 = 1$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin(x+h) + \sin(x-h)$$

$$= \sin x \cosh + \cos x \sinh$$

$$+ \sin x \cosh - \cos x \sinh$$

$$= 2\sin x \cosh$$

이므로

$$\frac{\sin(x+h) + \sin(x-h) - 2\sin x}{h^2}$$

$$= \frac{2\sin x \cosh - 2\sin x}{h^2}$$

$$= -2\sin x \times \frac{1 - \cosh}{h^2}$$

$$= -2\sin x \times \frac{(1 - \cosh)(1 + \cosh)}{h^2(1 + \cosh)}$$

$$= -2\sin x \times \frac{(1 - \cos^2 h)}{h^2} \times \frac{1}{1 + \cosh}$$

$$= -2\sin x \times \frac{\sin^2 h}{h^2} \times \frac{1}{1 + \cosh}$$

$$= -2\sin x \times (\frac{\sinh}{h})^2 \times \frac{1}{1 + \cosh}$$

따라서

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) + \sin(x-h) - 2\sin x}{h^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -2\sin x \times (\frac{\sinh}{h})^2 \times \frac{1}{1 + \cosh} \right\}$$

$$= -2\sin x \times \lim_{h \rightarrow 0} (\frac{\sinh}{h})^2 \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cosh}$$

$$= -2\sin x \times 1^2 \times \frac{1}{1 + 1}$$

$$= -\sin x$$

이므로 $f'(x) = -\cos x$

$$\text{따라서 } f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\cos \frac{4\pi}{3} = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 18

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x + \sin(3x)^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 9 \times \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 + 9 \times \frac{\sin(3x)^2}{(3x)^2} \right\}$$

$$= 9 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 + 9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)^2}{(3x)^2}$$

이때 $3x = s$, $(3x)^2 = t$ 라 하면

$x \rightarrow 0$ 일 때 $s \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\sin s}{s} \right)^2 = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)^2}{(3x)^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x + \sin(3x)^2}{x^2}$$

$$= 9 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 + 9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)^2}{(3x)^2}$$

$$= 9 \times 1 + 9 \times 1 = 18$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수})$$

라 하면

조건 (가)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan \frac{1}{2}x}$ 의 값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$

이어야 한다.

즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + ax^2 + bx + c) = c = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan \frac{1}{2}x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{\tan \frac{1}{2}x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{1}{2}x}{\tan \frac{1}{2}x} \times (x^2 + ax + b) \right\} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{\tan \frac{1}{2}x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + ax + b) \\ &= 2 \times 1 \times b = 2b = 16 \end{aligned}$$

따라서 $b = 8$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 8$ 이고, 조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 31 \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 3 + 2a + 8 = 31 \text{ 에서 } a = 10$$

따라서 $f(x) = x^3 + 10x^2 + 8x$ 이므로

$$f(-1) = -1 + 10 - 8 = 1$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ①

마름모 OABC의 한 변의 길이가 1 이므로 마름모 OABC의 넓이

$$f(\theta) \text{ 는}$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2 \times \triangle OAC \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OC} \times \sin \theta \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \theta \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

점 C의 좌표는 $C(\cos \theta, \sin \theta)$ 이고 마름모 OABC의 두 대각선의 중점은 서로 같으므로 선분 AC의 중점과 선분 OB의 중점은 서로 같다.

점 B의 좌표를 $B(a, b)$ 라 하면

$$\frac{a}{2} = \frac{\cos \theta + 1}{2}, \frac{b}{2} = \frac{\sin \theta}{2} \text{ 에서}$$

$$a = \cos \theta + 1, b = \sin \theta$$

즉, 점 B의 좌표는 $B(\cos \theta + 1, \sin \theta)$ 이므로

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \overline{OB}^2 = (\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta + 2\cos \theta + 1 + \sin^2 \theta \\ &= 2 + 2\cos \theta \end{aligned}$$

$$f'(x) = \cos \theta, g'(x) = -2\sin \theta \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + g'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos \frac{\pi}{3} - 2\sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

III. 미분법

5. 여러 가지 미분법

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

$$f(x) = e^x + e^{2x} \text{ 에서 } f'(x) = e^x + 2e^{2x}$$

함수 $f(2x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(2x)) = x \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(2x))f'(2x) \times 2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $g'(2)$ 의 값은 방정식 $f(2x) = 2$ 의 해를 ②에 대입하여 구할 수 있다.

$$f(2x) = 2 \text{ 에서}$$

$$e^{2x} + e^{4x} = 2 \quad (e^{2x} + 2)(e^{2x} - 1) = 0$$

$$e^{2x} + 2 > 2 \text{ 이므로 } e^{2x} - 1 = 0, x = 0$$

따라서 ②의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$g'(f(0))f'(0) \times 2 = 1$$

$$\text{이때 } f(0) = 2, f'(0) = 3 \text{ 이므로}$$

$$g'(2) = \frac{1}{2f'(0)} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

$$f(x) = \ln x + (\ln x)^2 + (\ln x)^3 + \cdots + (\ln x)^{10}$$

이라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\ln x}{x} + \frac{3(\ln x)^2}{x} + \dots + \frac{10(\ln x)^9}{x}$$

$$= \frac{1 + 2\ln x + 3(\ln x)^2 + \dots + 10(\ln x)^9}{x}$$

이 고 $f(e) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 10$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x + (\ln x)^2 + (\ln x)^3 + \dots + (\ln x)^{10} - 10}{\ln(\ln x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{\ln(\ln x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \left\{ \frac{f(x) - f(e)}{x - e} \times \frac{x - e}{\ln(\ln x)} \right\}$$

이 때

$$g(x) = \ln x, h(x) = \ln(\ln x) = g(g(x))$$

라 하면 $h(e) = \ln(\ln e) = \ln 1 = 0$ 이고

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = g'(g(x))g'(x) = g'(\ln x)g'(x)$$

$$= \frac{1}{x \ln x} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x - e}{\ln(\ln x)} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x - e}{h(x) - h(e)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{\frac{h(x) - h(e)}{x - e}} = \frac{1}{h'(e)} = e \ln e = e$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow e} \left\{ \frac{f(x) - f(e)}{x - e} \times \frac{x - e}{\ln(\ln x)} \right\}$$

$$= f'(e) \times e = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 10}{e} \times e = 55$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

$$g(x) = \frac{1}{1 + f(x)} \text{ 에서}$$

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{\{1 + f(x)\}^2}$$

따라서 함수 $g(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 미분계수는

$$g'(1) = -\frac{f'(1)}{\{1 + f(1)\}^2} = -\frac{12}{(1 + 1)^2} = -3$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 19

$$f(x) = xe^{ax+1} \text{ 에서}$$

$$f'(x) = e^{ax+1} + axe^{ax+1} = (1 + ax)e^{ax+1}$$

$$f''(x) = ae^{ax+1} + a(1 + ax)e^{ax+1} = a(2 + ax)e^{ax+1}$$

$$f''(0) = 2ae = 38e \text{ 에서 } a = 19$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ⑤

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \text{ 이고}$$

$$f'(0) = 1$$

$$f(0) = 1, g(1) = 0$$

이므로 역함수 미분법에 의해

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$g'(1) = 1$$

이다.

EBS교재

[정답] ④

$$g(3) = a \text{ 라 하면 } f(a) = 3 \text{ 이므로}$$

$$a^3 + 2a = 3$$

$$(a - 1)(a^2 + a + 3) = 0$$

$$\text{따라서 } a = 1$$

$$\text{또 } f'(x) = 3x^2 + 2 \text{ 에서 } f'(1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 2} = g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ①

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = f''(a) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}, f''(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$$

이다.

$$\frac{2}{(a+3)^3} = 2 \text{ 에서 } a = -2 \text{ 이다.}$$

EBS교재

[정답] ②

$$f(x) = 2x \sin x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = (2x)' \sin x + 2x(\sin x)'$$

$$= 2 \sin x + 2x \cos x$$

$$f''(x) = 2 \cos x + (2x)' \cos x + 2x(\cos x)'$$

$$= 2 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x$$

$$= 4 \cos x - 2x \sin x$$

따라서 $f''(\frac{\pi}{2}) = 0 - \pi = -\pi$

EBS연계 기출분석 3

[정답] 2

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} \text{ 에서}$$

$$f'(2) = \frac{12}{2 \cdot 3} = 2 \text{ 이다.}$$

EBS교재

[정답] ④

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+1} \text{ 에서}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(2x+1) - x^2(2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{2x(2x+1) - 2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x(x+1)}{(2x+1)^2}$$

이므로 $f'(1) = \frac{4}{9}$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

함수 $y = \ln(3x+7)$ 의 그래프를 x 축 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$$y = \ln\{3(x-a)+7\}, y = \ln(3x-3a+7)$$

이므로 $f(x) = \ln(3x-3a+7)$

따라서 $f'(x) = \frac{3}{3x-3a+7}$ 이므로

$$f'(1) = \frac{3}{10-3a} = 3 \text{ 에서 } a = 3 \text{ 이다.}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

$$g(x) = f(x^3) = 2^{x^3} + x^3 \ln a$$

$$g'(x) = 2^{x^3} \ln 2 \times 3x^2 + 3x^2 \ln a$$

$$g'(1) = 2^1 \ln 2 \times 3 + 3 \ln a = 6 \ln 2 + \ln a^3$$

$$= 36 \ln 2 \text{ 이므로}$$

$$30 \ln 2 = \ln a^3 = \ln 2^{30} \text{ 이다. 즉, } a^3 = 2^{30}$$

따라서 $a = 2^{10}$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

조건 (가)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+7}{x-1}$ 의 값이 존재

하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+7\} = 0$

함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로 $f(1)+7=0$ 에서 $f(1)=-7$

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+7}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 10$$

조건 (나)에 $x=1$ 을 대입하면

$$-7 = f(1) = -f(-1) \text{ 이므로 } f(-1) = 7$$

조건 (나)에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = f'(-x) \quad \dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1) = f'(-1) = 10$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고,

$$f(-1) = 7 \text{ 이므로}$$

역함수의 미분법에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{g(x)-g(7)} = \frac{1}{g'(7)}$$

$$= f'(-1)$$

$$= 10$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ⑤

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 3, \quad \frac{dy}{dt} = 8t + a \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8t+a}{3t^2-3}$$

$t = 2$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 9이므로

$$\frac{16+a}{12-3} = 9, \quad 16+a = 81$$

따라서 $a = 65$

6. 도함수의 활용

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 7

$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \text{ 점점의 좌표를}$$

$(t, t\sqrt{t})$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울
기는 $f'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t}$ 이고, 접선의 방정식은

$$y - t\sqrt{t} = \frac{3}{2}\sqrt{t}(x - t) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$-1 - t\sqrt{t} = \frac{3}{2}\sqrt{t}(1 - t)$$

$$t\sqrt{t} - 3\sqrt{t} - 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\sqrt{t} = X (X \geq 0)$ 이라 하면 $\textcircled{2}$ 은

$$X^3 - 3X - 2 = 0$$

$$(X - 2)(X + 1)^2 = 0$$

$$X \geq 0 \text{이므로 } X = 2$$

따라서 $t = 4$ 이고, 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 접
선의 방정식은

$$y = 3x - 4$$

따라서 $a = 3, b = -4$ 이므로

$$a - b = 3 - (-4) = 7$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

$$f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} \ln x \text{라 하면}$$

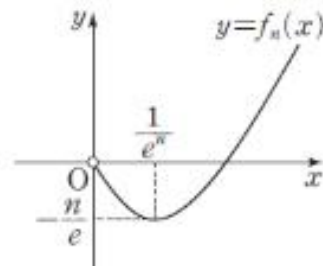
$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \ln x + x^{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{x} \\ &= x^{\frac{1}{n}-1} \left(\frac{1}{n} \ln x + 1 \right) \end{aligned}$$

$$f'_n(x) = 0 \text{에서 } x > 0 \text{이므로 } \frac{1}{n} \ln x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{e^n} \quad x > 0 \text{에서 함수 } f_n(x) \text{의 증가와}$$

감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{1}{e^n}$	...
$f'_n(x)$		-	0	+
$f_n(x)$		↘	극소	↗



함수 $f_n(x)$ 는 $x = \frac{1}{e^n}$ 에서 극소이면서 최

소이고 $f_n\left(\frac{1}{e^n}\right) = -\frac{n}{e}$ 이므로 $x^{\frac{1}{n}} \ln x \geq -\frac{n}{e}$

즉, 실수 p 의 최댓값은 $-\frac{n}{e}$ 이므로

$$a_n = -\frac{n}{e}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} \left(-\frac{n}{e} \right) = -\frac{1}{e} \sum_{n=1}^{10} n \\ &= -\frac{1}{e} \times \frac{10 \times 11}{2} = -\frac{55}{e} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ⑤

$$f(x) = (3x + k)e^{x^2} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{x^2} + (3x + k)e^{x^2} \times 2x \\ &= e^{x^2}(6x^2 + 2kx + 3) \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가
하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 에
서 $e^{x^2} > 0$ 이므로 $6x^2 + 2kx + 3 \geq 0$ 이어야
한다.

이차방정식 $6x^2 + 2kx + 3 = 0$ 의 판별식을

$$D \text{라 하면 } \frac{D}{4} = k^2 - 6 \times 3 \leq 0$$

즉, $k^2 \leq 18$

따라서 정수 k 의 값은

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 로 조건을 만족시키는 정수 k 의 개수는 9이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 27

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{2\sqrt{2}}{\sin x} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{2\sqrt{2} \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^3 x - 2\sqrt{2} \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^3 x (\tan^3 x - 2\sqrt{2})}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^3 x (\tan x - \sqrt{2})(\tan^2 x + \sqrt{2} \tan x + 2)}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

단한 구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 에서 $f'(x) = 0$ 일 때,

$\cos x > 0, \tan^2 x + \sqrt{2} \tan x + 2 > 0$ 이므로 $\tan x = \sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6} \leq \sqrt{2} \leq \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$\tan x = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right)$ 를 만족시키는

x 의 값을 $\alpha \left(\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \right)$ 라 하면

$$\tan \alpha = \sqrt{2}, \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{2}, \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 3 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha > 0 \text{이므로 } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

단한 구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{\pi}{6}$	...	α	...	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 극소이면서 최소

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 최솟값

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{2\sqrt{2}}{\sin \alpha} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

을 갖는다.

따라서 $m = 3\sqrt{3}$ 이므로 $m^2 = 27$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ④

$y' = -2e^{-x}$ 이므로

점 P에서의 접선의 방정식은

$$y = -2e^{-t}(x-t) + 2e^{-t}$$

이다. $x = 0$ 을 대입하면

$$y = 2(1+t)e^{-t}$$

이고 B(0, $2(1+t)e^{-t}$), A(0, $2e^{-t}$)이므로 $\overline{AB} = 2te^{-t}$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 2te^{-t} \times t = t^2 e^{-t}$$

$$S'(t) = 2te^{-t} - t^2 e^{-t} = t(2-t)e^{-t}$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } t = 2 \quad (\because t > 0)$$

이때, $S(t)$ 는 $t = 2$ 에서 극대이면서 최대이므로 구하는 t 의 값은 2이다.

EBS교재

[정답] ②

$y = e^{-x}$ 에서 $y' = -e^{-x}$ 이므로

점 (t, e^{-t}) 에서의 접선의 기울기는

$-e^{-t}$ 이고 접선의 방정식은

$$y' - e^{-t} = -e^{-t}(x-t) \text{이므로}$$

$$y' = -e^{-t}x + (t+1)e^{-t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 ①에 $y = 0, x = 0$ 을 각각 대입하여 두 점 P, Q의 좌표를 구하면

$$P(t+1, 0), Q(0, (t+1)e^{-t})$$

이므로 삼각형 OPQ의 넓이 $f(t)$ 는

$$f(t) = \frac{1}{2}(t+1)^2 e^{-t}$$

$$f'(t) = (t+1)e^{-t} + \frac{1}{2}(t+1)^2(-e^{-t})$$

$$= -\frac{(t+1)(t-1)}{2}e^{-t}$$

$t > 0$ 일 때, $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로

t	(0)	...	1	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	극대	↘

나타내면 다음과 같다.

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 극대이면서 최대이므로 $f(t)$ 의 최댓값은

$$f(1) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

$f(x) = 2\sqrt{2}\sec x - \tan^2 x$, $g(x) = k$ 라 하면

$$f'(x) = 2\sqrt{2}\sec x \tan x - 2\tan x \sec^2 x = 2\sec x \tan x (\sqrt{2} - \sec x)$$

$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 에서 $\sec x > 0$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \tan x = 0 \text{ 또는 } \sec x = \sqrt{2}$$

$$\text{즉, } x = -\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{4}$$

$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{3}$	...	$-\frac{\pi}{4}$	...	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$f(-\frac{\pi}{3})$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘	$f(\frac{\pi}{3})$

이때

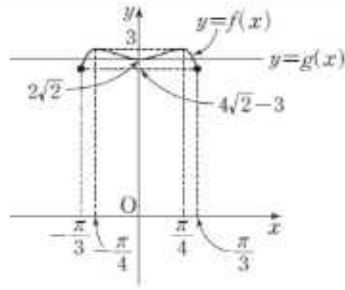
$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\sqrt{2}\sec(-x) - \tan^2(-x) \\ &= 2\sqrt{2}\sec x - (-\tan x)^2 \\ &= 2\sqrt{2}\sec x - \tan^2 x = f(x) \end{aligned}$$

이므로

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\sec \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{2} - 3$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sec \frac{\pi}{4} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = 4 - 1 = 3$$

$f(0) = 2\sqrt{2}\sec 0 - \tan^2 0 = 2\sqrt{2}$ 따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 2이어야 한다. 따라서 k 의 값은 3 또는 $b \leq k < 2\sqrt{2}$ 이다.

즉 $a = 3$, $b = 4\sqrt{2} - 3$ 이므로

$$a + b = 4\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

$g(x) = e^x - x^2 - 1$ 이라 하면

$$g'(x) = e^x - 2x \text{이므로 } g'(t) = e^t - 2t$$

즉, 곡선 $y = e^x - x^2 - 1$ 위의

점 $(t, e^t - t^2 - 1)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$y - (e^t - t^2 - 1) = (e^t - 2t)(x - t),$$

$$y = (e^t - 2t)x + (1 - t)e^t + t^2 - 1$$

이때 직선 l 의 y 절편은 $(1 - t)e^t + t^2 - 1$ 이므로

$$f(t) = (1 - t)e^t + t^2 - 1,$$

$$f'(t) = -e^t + (1 - t)e^t + 2t = -t(e^t - 2)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t = 0 \text{ 또는 } t = \ln 2$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	$\ln 2$	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(t)$ 는 $t=0$ 에서 극소이고, $t=\ln 2$ 에서 극대이다. 따라서 함수 $f(t)$ 의 극솟값은

$$f(0) = (1 - 0)e^0 + 0^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

$f(x) = x^2 - 3x + \ln x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 3 + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \\ &= \frac{(2x-1)(x-1)}{x} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 증감표에 따라 함수 $f(x)$ 는 구간

$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 에서 감소한다. (참)

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } f''(x) &= 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2} \\ &= \frac{(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$ 에서 $x > 0$ 이므로 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 변곡점은 1개이다. (거짓)

ㄷ. 열린 구간 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 에서 $f''(x) < 0$

이므로 열린 구간 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 에서

곡선 $y = f(x)$ 는 위로 볼록하다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ④

$f(x) = (x-4)^2 e^{x-2}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-4)e^{x-2} + (x-4)^2 e^{x-2} \\ &= (x-2)(x-4)e^{x-2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $e^{x-2} > 0$ 이므로

$x = 2$ 또는 $x = 4$

단한 구간 $[1, 6]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	4	...	6
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{9}{e}$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗	$4e^4$

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극댓값 4를 가지고, $x = 4$ 에서 극솟값 0을 갖는다.

또한 $f(1) = \frac{9}{e}$, $f(6) = 4e^4$ 이므로 닫힌 구간 $[1, 6]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $4e^4$ 이다. 따라서 $(x-4)^2 e^{x-2} \leq k$ 을 만족하는 k 의 최솟값은 $4e^4$ 이다.

IV. 적분법

7. 부정적분

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

이때 $\sqrt{x} = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = 2 \int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

(단, C 는 적분상수)

한편, 열린 구간 $(1, 4)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[1, 4]$ 에서 증가한다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 4$ 에서 최댓값 e^2 을 갖는다. 즉, $f(4) = 2e^2 + C = e^2$

$C = -e^2$ 따라서 $f(x) = 2e^{\sqrt{x}} - e^2$ 이고

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최솟값을 가지므로 최솟값은 $f(1) = 2e^{\sqrt{1}} - e^2 = e(2 - e)$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의

접선의 기울기가 $(t + e^t)e^t$ 이므로

$$f'(t) = (t + e^t)e^t \quad \text{즉, } f'(x) = (x + e^x)e^x$$

그러므로

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int f'(x)dx = \int (xe^x + e^{2x})dx \\
&= \int xe^x dx + \int e^{2x} dx \\
&= \left(xe^x - \int e^x dx\right) + \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \\
&\text{(단, } C_1 \text{은 적분상수)} \\
&= (xe^x - e^x + C_2) + \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \\
&\text{(단, } C_2 \text{은 적분상수)} \\
&= \frac{1}{2}e^{2x} + (x-1)e^x + C \\
&\text{(단, } C = C_1 + C_2) \\
&\text{이때 곡선 } y=f(x) \text{가 원점 } (0,0) \text{을} \\
&\text{지나므로 } f(0)=0 \text{에서} \\
f(0) &= \frac{1}{2} - 1 + C = 0 \quad C = \frac{1}{2} \\
&\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (x-1)e^x + \frac{1}{2} \\
&\text{이므로 } f(1) = \frac{1}{2}(e^2 + 1)
\end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3^x - 1)^2}{3^x} \text{에서} \\
f(x) &= \int \frac{(3^x - 1)^2}{3^x} dx \\
&= \int \frac{3^{2x} - 2 \times 3^x + 1}{3^x} dx \\
&= \int \left\{ 3^x - 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x \right\} dx \\
&= \frac{3^x}{\ln 3} - 2x + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C \\
&= \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} - 2x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\
f(0) &= 2 \text{이므로} \\
\frac{3^0}{\ln 3} - \frac{3^{-0}}{\ln 3} - 2 \times 0 + C &= 2 \\
\text{즉, } C &= 2
\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f(1) = \frac{3^1}{\ln 3} - \frac{3^{-1}}{\ln 3} - 2 + 2 = \frac{8}{3\ln 3}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

$$\begin{aligned}
&\int \{f(x) + x^2 \sqrt{x^2 + 1}\} dx = xf(x) + C \text{의} \\
&\text{양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
f(x) + x^2 \sqrt{x^2 + 1} &= f(x) + xf'(x) \\
f(x) &= \int f'(x) dx = \int x \sqrt{x^2 + 1} dx \\
x^2 + 1 &= t \text{로 놓으면 } 2x = \frac{dt}{dx} \text{이므로} \\
f(x) &= \int x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times t^{\frac{3}{2}} + C_1 \\
&= \frac{1}{3} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} + C_1 \\
&\text{(단, } C_1 \text{은 적분상수)}
\end{aligned}$$

$$f(2\sqrt{2}) = \frac{29}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} \times 9 \times 3 + C_1 = \frac{29}{3}, \quad C_1 = \frac{2}{3}$$

따라서

$$f(x) = \frac{1}{3} (x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} + \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

2018수능대비 EBS 연계 예상문항 /

[정답] $-\pi$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{-h} \\
&= 2f'(x) = 2x \sin x \\
&\text{에서} \\
f'(x) &= x \sin x \\
&\text{그러므로}
\end{aligned}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int x \sin x dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

(단, C 는 적분상수)

이때 $f(\pi) = \pi + C = 2\pi$ 이므로

$$C = \pi$$

따라서 $f(x) = -x \cos x + \sin x + \pi$ 이므로

$$f(2\pi) = -2\pi + \pi = -\pi$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] $\frac{1}{2}(e+1)$

$f'(x) = xe^{x^2}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int xe^{x^2} dx$$

$\int xe^{x^2} dx$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면 $2x = \frac{dt}{dx}$

이므로

$$\int xe^{x^2} dx = \int \frac{1}{2} e^t dt$$

$$= \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

한편 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{2} + C$	$\nearrow$

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 1을 가지므로

$$f(0) = \frac{1}{2} + C = 1, \quad \text{즉 } C = \frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$ 이고

$$f(1) = \frac{1}{2}(e+1)$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 4

$f'(x) = \cos x + 2\sin x$ 에서

$$f(x) = \int (\cos x + 2\sin x) dx$$

$= \sin x - 2\cos x + C$ (단, C 는 적분상수)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ 에서 } x \rightarrow 0 \text{ 일 때 (분모)} \rightarrow 0$$

이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = -2 + C = 0 \text{ 이므로 } C = 2$$

따라서

$$f(\pi) = \sin \pi - 2\cos \pi + 2 = 2 + 2 = 4$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] $\frac{1}{2}$

$$\int f(x) \cos x dx = x \sin x \text{ 의 양변을 } x \text{ 에}$$

대하여 미분하면

$$f(x) \cos x = \sin x + x \cos x \text{ 이므로}$$

$$f(x) - x = \tan x$$

따라서

$$g(x) = \int (f(x) - x) \cos x dx = \int \sin x dx$$

$$= -\cos x + C$$

$$g(0) = -1 + C = 0 \text{ 에서 } C = 1 \text{ 이므로}$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

8. 정적분

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)dt = \ln a \quad \text{이때} \quad \int_1^1 f(t)dt = 0$$

이므로 $a=1$ 그러므로 주어진 등식은

$$\int_1^{2x+1} f(t)dt = \ln(x^2+1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$F'(x)=f(x)$ 라 하고 $\textcircled{1}$ 의 좌변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} \int_1^{2x+1} f(t)dt = \frac{d}{dx} [F(t)]_1^{2x+1}$$

$$= \frac{d}{dx} \{F(2x+1) - F(1)\}$$

$$= 2F'(2x+1) = 2f(2x+1)$$

한편, $\textcircled{1}$ 의 우변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} \ln(x^2+1) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{그러므로}$$

$$2f(2x+1) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{의 등식의 양변에}$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } 2f(3)=1, \quad f(3)=\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a+f(3)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$, a, b, c 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (ax^2+bx+c)\sin x dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (ax^2+c)\sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} bx \sin x dx \end{aligned}$$

여기서 함수 $y=(ax^2+c)\sin x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

함수 $y=bx \sin x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (ax^2+c)\sin x dx = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} bx \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} bx \sin x dx$$

따라서

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} bx \sin x dx$$

$$= -2[bx \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \cos x dx$$

$$= -2[bx \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2[b \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2b$$

$$= 4$$

에서 $b=2$

즉, $f(x)=ax^2+2x+c$ 이므로

$$f(2)-f(-2)=(4a+4+c)-(4a-4+c)=8$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

$f(t)=te^t$ 이라 하고, $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} \int_1^x te^t dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} \int_1^x f(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[F(t)]_1^x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{F(x)-F(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} F'(1)$$

$$= \frac{1}{2} f(1)$$

$$= \frac{e}{2}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ⑤

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx = 2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\{0 - (-1)\} = 2$$



[정답] ①

 $f(x) = |\cos 2x|$ 라 하면

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x & \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right) \\ -\cos 2x & \left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$



[정답] ②

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln \frac{x}{e} dx &= \int_1^e (\ln x - 1) dx \\ &= [x \ln x - 2x]_1^e \\ &= (e - 2e) - (0 - 2) = 2 - e \end{aligned}$$



[정답] 1

 $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$ 이라 두면 $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \int_1^e f(x) g'(x) dx \\ &= [f(x) g(x)]_1^e - \int_1^e f'(x) g(x) dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx = e - [x]_1^e = 1 \end{aligned}$$



[정답] ②

$$\int_1^x f(t) dt = x^2 - a\sqrt{x} \quad (x > 0) \text{에} \quad x = 1$$

을 대입하면 $0 = 1 - a$ 이므로 $a = 1$ 이다.양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ 이므로 } f(1) = \frac{3}{2} \text{ 이다.}$$



[정답] ①

주어진 등식의 양변에 $x = 1$ 을 대입한 후
 $\int_1^1 f(t) dt = 0$ 임을 이용하여 a 의 값을 구한다.

또 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하여 $f(x)$ 를 구한 후 $f(a)$ 의 값을 구한다.

주어진 등식의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t) dt = 1 - a \text{ 이때}$$

$$\int_1^1 f(t) dt = 0 \text{ 이므로 } a = 1$$

그러므로 주어진 등식은

$$\int_1^x f(t) dt = \sqrt{x} - x \text{ 이므로}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} \int_1^x f(t) dt = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 1, \text{ 즉}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 1$$

$$\text{따라서 } f(a) = f(1) = -\frac{1}{2}$$



[정답] ③

 $x - 1 = t$ 라 두면 $dx = dt$ 이므로

$$\int_2^6 \ln(x-1) dx = \int_1^5 \ln t dt$$

$$= [t \ln t - t]_1^5 = 5 \ln 5 - 4 \text{ 이다.}$$



[정답] $x \ln x - x + C$ (단, C 는 적분상수)

$f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$ 이라 두면

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ 이므로

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \left(x \times \frac{1}{x}\right) dx$$

$= x \ln x - x + C$ (단, C 는 적분상수)



EBS연계 기출분석 5

[정답] 4

$$\int_2^4 2e^{2x-4} dx = [e^{2x-4}]_2^4 = e^4 - 1 = k$$

따라서 $\ln(k+1) = 4$ 이다.



EBS교재

[정답] ④

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4x^2}{e^x - 2x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(e^x + 2x)(e^x - 2x)}{e^x - 2x} dx$$

$$= \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 2x dx = [e^x]_0^1 + [x^2]_0^1$$

$$= (e - 1) + (1 - 0) = e$$



EBS연계 기출분석 6

[정답] 16

함수 $f(x) = \ln(x^4 + 1) - c$ ($c > 0$)은

$f(-x) = f(x)$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭이다.

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 1} = 0 \text{에서 } f(x) \text{는 } x = 0 \text{에}$$

서 극솟값을 갖는다.

$c > 0$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프 개형은 아래와 같다.



$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \text{에서 } g'(x) = f(x) \text{이고}$$

조건 (가)에 의해

$$g'(1) = f(1) = 0 \text{이므로 } c = \ln 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

이고 $y = f(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

따라서 $y = g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대,
 $x = 1$ 에서 극소이고,

점 $(0, g(0))$ 에 대해 대칭이다.

그런데 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되는 경우는 아래 그림과 같다.



가능한 a 의 값은

$\alpha_1, \alpha_2 (= -1), \alpha_3 (= 1), \alpha_4$ 의 4개다.

따라서 $m = 4 \quad \dots \textcircled{2}$



$y = g(x)$ 의 그래프는 점 $(0, g(0))$ 에 대해 대칭이므로

위의 그림에서 $A = A', B = B'$ 이다.

따라서 $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x) dx$ 는 사각형 OPQR의

넓이와 같다.

조건 (나)에서

$$\square \text{OPQR} = k \cdot \alpha_4 \cdot \{g(0) - g(1)\} \text{ 이고}$$

$$\alpha_4 = \overline{\text{OP}}, \quad g(0) - g(1) = \frac{1}{2} \overline{\text{OR}} \text{ 이므로}$$

$$k = 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③에 의해

$$m \cdot k \cdot e^c = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \text{ 이다.}$$



EBS교재

[정답] 4

$$f(x) = \int_a^x \{\log_2(t^4 + 4t + 5) - 2\} dt \text{에서}$$

$$f'(x) = \log_2(x^4 + 4x + 5) - 2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4x^3 + 4}{x^4 + 4x + 5} \times \frac{1}{\ln 2} \\ &= \frac{4(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^4 + 4x + 5} \times \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} g(x) &= 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1) \\ &= 4(x+1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

이때 함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최솟값 $g(-1) = 2$ 를 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) > 0$ 이다.

그러므로 $f''(x) = 0$ 에서 $x = -1$

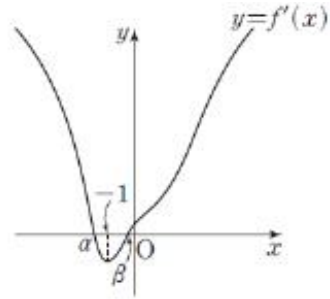
함수 $f'(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

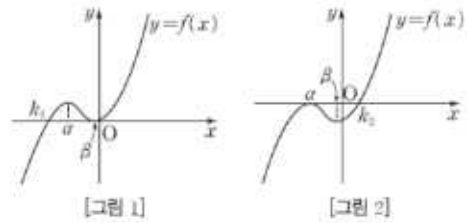
이때 $f'(-1) < 0$ 이므로 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 x 축과 두 점에서 만난다. 이 두 교점의 x 좌표를 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$$f'(0) = \log_2 5 - 2 > 0 \text{ 이므로}$$

$y = f'(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근은 α, β 이고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나야 하므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 [그림1] 또는 [그림2]와 같이 x 축에 접하는 곡선이어야 한다.



이때 [그림1], [그림2]에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표 중 α, β 가 아닌 것을 각각 k_1, k_2

$$(k_1 < \alpha < \beta < k_2) \text{라 하면}$$

$$f(a) = \int_a^a \{\log(t^4 + 4t + 5) - 2\} dt = 0 \text{ 이므로}$$

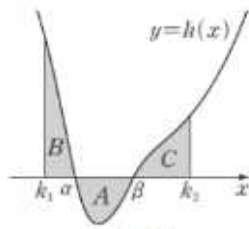
a 의 값은 k_1, k_2, α, β 로 서로 다른 실수 a 의 개수는 4이다.

[참고]

$$f(x) = \int_a^x \{\log_2(t^4 + 4t + 5) - 2\} dt \text{에서}$$

$$h(t) = \log_2(t^4 + 4t + 5) - 2 \text{라 하면}$$

$$f(x) = \int_a^x h(t) dt$$



[그림 3]

이때 $f'(x) = h(x)$ 이고 함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.

곡선 $y = h(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 영역을 A 라 하면 영역 A 와 넓이가 각각 같은 두 영역 B 와 C 를 그림과 같이 잡을 수 있다. 이때 영역 B 는 곡선 $y = h(x)$ 와 x 축 및 직선 $x = k_1$ 로 둘러싸인 영역이고, 영역 C 는 곡선 $y = h(x)$ 와 x 축 및 직선 $x = k_2$ 로 둘러싸인 영역이다.

(단, $k_1 < \alpha < \beta < k_2$)

(i) $a = k_1$ 일 때,

$$f(x) = \int_{k_1}^x h(t)dt \text{ 이므로}$$

$$f(k_1) = 0 \text{ 이고 } f(\beta) = \int_{k_1}^{\beta} h(t)dt = 0 \text{ 이다.}$$

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 풀이의 [그림 1]과 같이 x 축과 두 점에서 만난다.

(ii) $a = \beta$ 일 때,

$$f(x) = \int_{\beta}^x h(t)dt \text{ 이므로 } f(\beta) = 0 \text{ 이고}$$

$$f(k_1) = \int_{\beta}^{k_1} h(t)dt = - \int_{k_1}^{\beta} h(t)dt = 0 \text{ 이다.}$$

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 풀이의 [그림 1]과 같이 x 축 두 점에서 만난다.

(iii) $a = k_2$ 일 때,

$$f(x) = \int_{k_2}^x h(t)dt \text{ 이므로 } f(k_2) = 0 \text{ 이고}$$

$$f(\alpha) = \int_{k_2}^{\alpha} h(t)dt = - \int_{\alpha}^{k_2} h(t)dt = 0 \text{ 이다.}$$

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 풀이의 [그림 2]와 같이 x 축과 두 점에서

만난다.

(iv) $a = \alpha$ 일 때,

$$f(x) = \int_{\alpha}^x h(t)dt \text{ 이므로}$$

$$f(\alpha) = 0 \text{ 이고 } f(k_2) = \int_{\alpha}^{k_2} h(t)dt = 0 \text{ 이다.}$$

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 풀이의 [그림 2]와 같이 x 축과 두 점에서 만난다.

(v) a 의 값이 k_1, α, β, k_2 중 하나가 아닐 때,

[그림 3]으로부터 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축에 접하지 않음을 유추할 수 있다.

$a < k_1$ 또는 $k_2 < a$ 인 경우 $f(a) = 0$ 이고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만난다.

$k_1 < a < \alpha$ 또는 $\alpha < a < \beta$ 또는

$\beta < a < k_2$ 인 경우 $f(a) = 0$ 이고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 세 점에서 만난다. 즉, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 두 점에서 만나지 않는다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 /

[정답] 1

$$\int_1^x (t-x)f(t)dt = k-x+\ln x \text{ 에서 양변}$$

x 에 1을 대입하면

$$0 = k-1 \text{ 이므로 } k=1 \text{ 한편}$$

$$\int_1^x tf(t)dt - x \int_1^x f(t)dt = 1-x+\ln x$$

.....㉠

이고 ㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf(x) - \int_1^x f(t)dt - xf(x) = -1 + \frac{1}{x}$$

$$\int_1^x f(t)dt = 1 - \frac{1}{x} \text{㉡}$$

㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{따라서 } f(k) = f(1) = 1$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 277

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + ax + b,$$

$$f''(x) = 3x + a$$

인테 곡선 $y=f(x)$ 가 $x=0$ 에서 변곡점을 가지므로 $f''(0)=a=0$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + bx + C$ 이고

$$f(0)=1 \text{ 이므로 } C=1$$

또한 곡선 $y=f(x)$ 가 $(-1, 0)$ 을 지나므로 $f(-1) = -\frac{1}{2} - b + 1 = -b + \frac{1}{2} = 0$ 이고

$$b = \frac{1}{2}, \text{ 즉 } f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + 1$$

따라서 $x < -1$ 일 때 $f(x) < 0$,

$x > -1$ 일 때 $f(x) > 0$

이때 $f(x)=t$ 로 놓으면 $f'(x) = \frac{dt}{dx}$ 이고

$x=-2$ 일 때 $t=f(-2)=-4$,

$x=0$ 일 때 $t=f(0)=1$ 이다.

$f(k)=-1$ 이라 하면

$-2 < x < k$ 에서 $t=f(x) < -1$ 이므로

$f(t) < 0$,

$k \leq x < 0$ 에서 $t=f(x) \geq -1$ 이므로

$f(t) \geq 0$

따라서

$$\begin{aligned} & 8 \int_{-2}^0 \{ |(f \circ f)(x)| \times f'(x) \} dx \\ &= 8 \left(- \int_{-4}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^1 f(t) dt \right) \\ &= 8 \left\{ - \left[\frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{4}t^2 + t \right]_{-4}^{-1} + \left[\frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{4}t^2 + t \right]_{-1}^1 \right\} \\ &= - [t^4 + 2t^2 + 8t]_{-4}^{-1} + [t^4 + 2t^2 + 8t]_{-1}^1 \\ &= - \{ 1 + 2 - 8 - (256 + 32 - 32) \} \\ &\quad + \{ 1 + 2 + 8 - (1 + 2 - 8) \} \\ &= 277 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] -10

$f'(-x) = f'(x)$ 이므로

$$-f(-x) + c_1 = f(x) + c_2$$

$f(0)=0$ 이므로 $-f(-x) = f(x)$

따라서 $f(-2) = -3$ 이고

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = - \int_0^2 f(x) dx$$

부분적분법에 의해

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 \{ x f'(x) \} dx \\ &= [x f(x)]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 f(x) dx \\ &= 2f(-2) + \int_0^2 f(x) dx \\ &= -6 - 4 = -10 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] $2-3e$

$$\int_1^x f(t) dt = e^x + k - x \int_0^1 t f(t) dt \text{ 에서}$$

$$\int_0^1 t f(t) dt = a \text{ (} a \text{는 상수)로 놓으면}$$

$$\int_1^x f(t) dt = e^x + k - ax \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x) = e^x - a$ 이므로

$$a = \int_0^1 t f(t) dt = \int_0^1 t(e^t - a) dt$$

$$= \int_0^1 t e^t dt - \int_0^1 a t dt$$

$$= [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt - \left[\frac{1}{2} a t^2 \right]_0^1$$

$$= e - [e^t]_0^1 - \frac{a}{2} = e - (e - 1) - \frac{1}{2}a$$

$$= 1 - \frac{1}{2}a$$

즉, $a = 1 - \frac{1}{2}a$ 에서 $a = \frac{2}{3}$ 이므로 ①에서

$$\int_1^x f(t)dt = e^x + k - \frac{2}{3}x \quad \cdots \textcircled{L}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = e + k - \frac{2}{3}$$

따라서 $3k = 2 - 3e$

9. 정적분의 활용

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

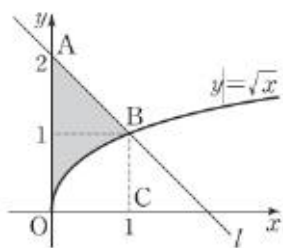
직선 l 의 방정식은 $y = -x + 2$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(-x+2) - \sqrt{x}\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{2} + 2 - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$C(1,0)$ 이라 할 때, 구하는 넓이는 사각형 $AOCB$ 의 넓이에서 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같다. 그러므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 - \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$



2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

$x = t \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \right)$ 인 x 축 위의 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반지름의 길이가 $\sqrt{\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)}$ 인 원이므로

단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

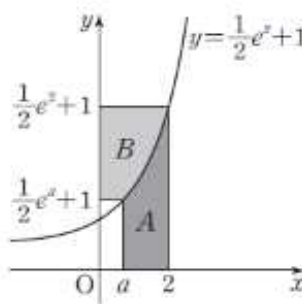
$$S(t) = \pi \left\{ \sqrt{\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)} \right\}^2 = \pi \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$$

따라서 구하는 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} S(x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx \\ &= \pi \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①



그림과 같이 곡선 $y = \frac{1}{2}e^x + 1$ 과 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 곡선 $y = \frac{1}{2}e^x + 1$ 과 y 축 및 두 직선 $y = \frac{1}{2}e^2 + 1$, $y = \frac{1}{2}e^a + 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하자. $A+B$ 는 가로, 세로의 길이가 각각 2, $\frac{1}{2}e^2 + 1$ 인 직사각형의 넓이에서 가로, 세로의 길이가 각각 a , $\frac{1}{2}e^a + 1$ 인 직사각형의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$A + B = 2 \times \left(\frac{1}{2}e^2 + 1 \right) - a \times \left(\frac{1}{2}e^a + 1 \right)$$

이때 $A = B$ 이므로

$$A = \left(\frac{1}{2}e^2 + 1\right) - \frac{a}{2} \times \left(\frac{1}{2}e^a + 1\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또한 $A = \int_a^2 \left(\frac{1}{2}e^x + 1\right) dx$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_a^2 \left(\frac{1}{2}e^x + 1\right) dx &= \left[\frac{1}{2}e^x + x\right]_a^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}e^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{2}e^a + a\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}e^2 + 1\right) - \frac{a}{2} \times \left(\frac{1}{2}e^a + 1\right) \quad (\textcircled{7} \text{에 의해}) \end{aligned}$$

$$\text{예} \text{서} \quad \left(\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\right)e^a = \frac{a}{2} - 1$$

$$(a-2)e^a = 2(a-2)$$

$$0 < a < 2 \text{ 이므로 } e^a = 2$$

$$\text{따} \text{라} \text{서 } a = \ln 2$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

x 축 위의 점 $(t, 0)$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sin t + \cos t$ 인 정삼각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{\sqrt{3}}{4}(\sin t + \cos t)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + 2\sin t \cos t) \end{aligned}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + 2\sin t \cos t) dt \end{aligned}$$

$$\sin t = s \text{ 로 놓으면 } \cos t = \frac{ds}{dt} \text{ 이고}$$

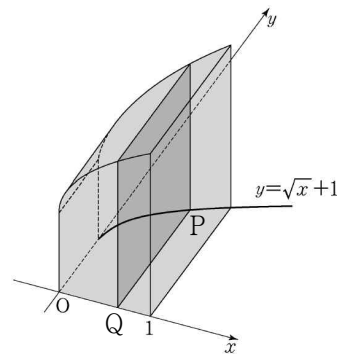
$$t = 0 \text{ 일 때 } s = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \text{ 일 때 } s = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + 2s) ds \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{4}s + \frac{\sqrt{3}}{2}s^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\sqrt{3}}{4}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}(\pi + 2) \end{aligned}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ④



그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x} + 1$ 위의 점 P에서 x 축 위에 내린 수선의 발을 Q라 하면 그림에서 $PQ = \sqrt{x} + 1$ 이므로 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 $S(x)$ 는

$$S(x) = PQ^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 = x + 2\sqrt{x} + 1$$

이다. 따라서 구하는 입체도형의 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(x) dx \\ &= \int_0^1 (x + 2\sqrt{x} + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

이다.

EBS교재

[정답] ①

$$f(x) = x \sin 2x \text{ 라 하면}$$

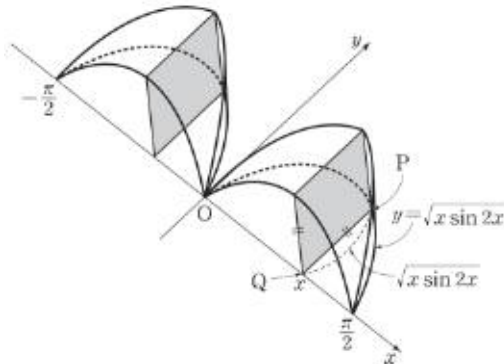
$$\begin{aligned} f(-x) &= -x \times \sin(-2x) \\ &= x \sin 2x \end{aligned}$$

$$= f(x)$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭인 함수이다.

곡선 $y = \sqrt{x \sin 2x}$ 위의 점 P에서 x 축 위에 내린 수선의 발을 Q라 하면 다음 그림에서 $PQ = \sqrt{x \sin 2x}$ 이므로 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 $S(x)$ 는

$$\begin{aligned} S(x) &= \overline{PQ}^2 \\ &= x \sin 2x \end{aligned}$$



따라서 구하는 입체도형의 부피 V 는

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$$

여기서

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx \\ &= \left[x \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\left(\frac{\sin 2x}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } V = \frac{\pi}{2}$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ④

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 닫힌 구간

$[0, 1]$ 에서 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 k 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 곡선 $y = f(x)$

와 x 축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= 2 \text{ 에서} \\ -S_1 + S_2 &= 2 \dots \text{①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= 2\sqrt{2} \text{ 에서} \\ S_1 + S_2 &= 2\sqrt{2} \dots \text{②} \end{aligned}$$

①, ②에서

$$S_1 = \sqrt{2} - 1, S_2 = \sqrt{2} + 1$$

i) $0 \leq x \leq k$ 인 경우

$$F(x) = \int_0^x (-f(t)) dt \text{ 이고}$$

$F'(x) = -f(x)$ 이다.

$\int_0^k f(x) F(x) dx$ 에서 $F(x) = s$ 로 치환하면

$x = 0$ 일 때 $s = 0$,

$x = k$ 일 때 $s = \sqrt{2} - 1$ 이고,

$$F'(x) \frac{dx}{ds} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^k f(x) F(x) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}-1} (-s) ds \\ &= \left[-\frac{1}{2} s^2 \right]_0^{\sqrt{2}-1} = -\frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1)^2 \end{aligned}$$

ii) $k \leq x \leq 1$ 인 경우

$$F(x) = (\sqrt{2} - 1) + \int_k^x f(t) dt \text{ 이므로}$$

$F'(x) = f(x)$ 이다.

$\int_k^1 f(x) F(x) dx$ 에서 $F(x) = s$ 로 치환하면

$x = k$ 일 때 $s = \sqrt{2} - 1$,

$x = 1$ 일 때 $s = 2\sqrt{2}$ 이고,

$$F'(x) \frac{dx}{ds} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\int_k^1 f(x) F(x) dx = \int_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} s ds$$

$$= \left[\frac{1}{2} s^2 \right]_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} = 4 - \frac{1}{2} (\sqrt{2}-1)^2$$

i), ii)에서

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(x)F(x)dx \\ &= \int_0^k f(x)F(x)dx + \int_k^1 f(x)F(x)dx \\ &= -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2 + 4 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2 \\ &= 4 - (\sqrt{2}-1)^2 = 4 - (3-2\sqrt{2}) \\ &= 1+2\sqrt{2} \end{aligned}$$



[정답] ④

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=t$ ($t>1$)로 둘러싸인 도형의 넓이가 $g(t)$ 이므로 조건 (가)에 의하여

$$g(t) = \int_1^t f(x)dx \quad (t>1)$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$g'(t) = f(t) \quad (t>1)$$

조건 (나)에서

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$$

$$= g(3) - g(2) = 1 \quad \cdots \text{㉠}$$

$f(x) = g'(x)$ ($x>1$)이므로

$$\int_2^3 f(x) \{g(x)\}^2 dx = \int_2^3 g'(x) \{g(x)\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} [\{g(x)\}^3]_2^3$$

$$= \frac{\{g(3)\}^3 - \{g(2)\}^3}{3} = \frac{19}{3}$$

$$\{g(3)\}^3 - \{g(2)\}^3 = 19 \quad \cdots \text{㉡}$$

$$\{g(3)\}^3 - \{g(2)\}^3$$

$$= \{g(3)-g(2)\}^3 + 3 \times g(3) \times g(2) \{g(3)-g(2)\}$$

이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$$19 = 1^3 + 3 \times g(3) \times g(2) \times 1$$

$$3 \times g(3) \times g(2) = 18$$

따라서 $g(2) \times g(3) = 6$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 /

[정답] $\frac{1}{2}$

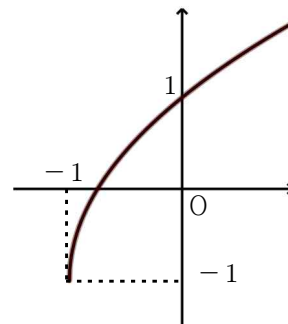
곡선 $y = 2\sqrt{x+1} + a$ 이 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로 $-1 = a$ 이다.

곡선 $y = 2\sqrt{x+1} - 1$ 이 x 축과 만나는 점의 좌표를 구하면

$$0 = 2\sqrt{x+1} - 1, \text{ 즉 } x = -\frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

점 $(-\frac{3}{4}, 0)$ 을 지난다.

곡선은 다음과 같다.



따라서 곡선, 직선 $x=-1$, x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^0 |2\sqrt{x+1} - 1| dx$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} (1 - 2\sqrt{x+1}) dx + \int_{-\frac{3}{4}}^0 (2\sqrt{x+1} - 1) dx$$

$x+1=t$ 로 놓으면 $dx=dt$ 이고 $x=-1$ 일 때 $t=0$, $x=-\frac{3}{4}$ 일 때 $t=\frac{1}{4}$, $x=0$ 일 때 $t=1$ 이다. 따라서

$$\int_{-1}^0 |2\sqrt{x+1} - 1| dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} (1 - 2\sqrt{t}) dt + \int_{\frac{1}{4}}^1 (2\sqrt{t} - 1) dt$$

$$= \left[t - \frac{4}{3} t\sqrt{t} \right]_0^{\frac{1}{4}} + \left[\frac{4}{3} t\sqrt{t} - t \right]_{\frac{1}{4}}^1$$

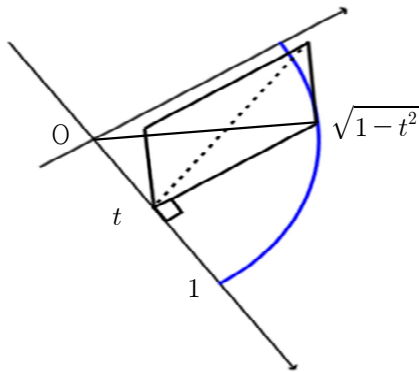
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{4}{3} - 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

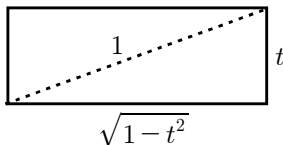
[정답] $\frac{1}{3}$

x 축 위의 $x = t$ ($0 \leq t \leq 1$)인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면이

곡선 $y = \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$)과 만나는 점의 y 좌표는 $\sqrt{1-t^2}$ 이다.



이때 단면은 대각선의 길이가 1인 직사각형이므로 가로 세로의 길이가 각각 $\sqrt{1-t^2}$, t 이다.



단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = t\sqrt{1-t^2}$$

따라서 구하는 부피를 V 라 하면

$$V = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2} dt$$

이때 $1-t^2 = s$ 로 놓으면 $-2t = \frac{ds}{dt}$ 이고

$t=0$ 일 때 $s=1$, $t=1$ 일 때 $s=0$ 이므로

$$\begin{aligned} V &= \int_1^0 -\frac{1}{2}\sqrt{s} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{s} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}s\sqrt{s} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

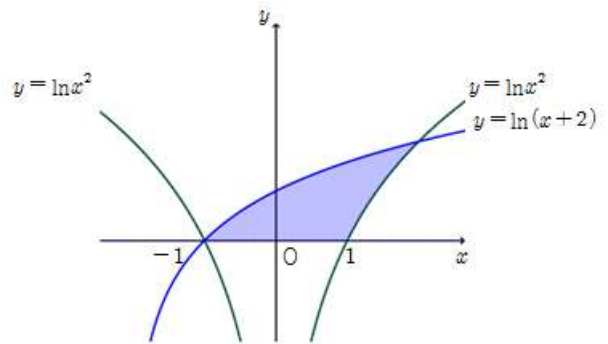
[정답] $-1 + 4\ln 2$

두 곡선 $y = \ln x^2$ 과 $y = \ln(x+2)$ 의 교점을 구하면

$$\ln x^2 = \ln(x+2) \Rightarrow x^2 = x+2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0,$$

즉 그림과 같이 두 점 $(-1, 0)$ 과 $(2, \ln 4)$ 에서 만난다.



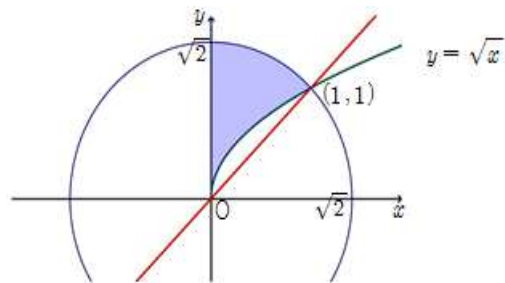
따라서 두 곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^2 \ln(x+2) dx - \int_1^2 \ln x^2 dx \\ &= [(x+2)\ln(x+2) - x]_{-1}^2 - 2[x\ln x - x]_1^2 \\ &= 4\ln 4 - 2 - 1 - 2(2\ln 2 - 2 + 1) \\ &= -1 + 4\ln 2 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}$

원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 곡선 $y = \sqrt{x}$ 는 점 $(1, 1)$ 에서 만난다. 따라서 넓이를 구하고자 하는 부분은 아래 색칠된 부분이다.



곡선 $y = x$ ($x \geq 0$) 와 원 $x^2 + y^2 = 2$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분 A 의 넓이를 a , 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 $y = x$ 로 둘러싸인 부분 B 의

넓이를 b 라 하면 구하는 부분의 넓이는 $a-b$ 이다.

$$\text{한편 } A \text{ 는 부채꼴이므로 } a = \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$b = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \frac{1}{2} \times 1 \times 1$$

$$= \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

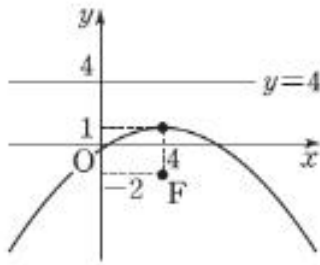
$$\text{따라서 } a-b = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}$$

V. 평면곡선

10. 이차곡선

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④



초점이 $F(4, -2)$, 준선이 $y=4$ 이므로 그 림에서 꼭짓점은 $(4, 1)$ 이다.

또한 꼭짓점과 준선 $y=4$ 사이의 거리가 3이므로

$$x^2 = 4py \text{ 에서 } p = -3$$

포물선 $x^2 = -12y$ 를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것 이므로

$$(x-4)^2 = -12(y-1)$$

$$\text{따라서 } a = -4, b = -12, c = -1 \text{ 이므로}$$

$$a+b+c = -4 + (-12) + (-1) = -17$$

[다른 풀이]

포물선 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하고 점 P 에서 준선 $y=4$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2} = |y-4|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - 8x + 12y + 4 = 0$$

$$\text{즉, } (x-4)^2 = -12(y-1)$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

타원 $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} = 1$ 에서 타원의 정의에

의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{QF} + \overline{QF'} = 2\sqrt{k}$$

삼각형 PQF' 의 둘레의 길이는

$$\overline{PQ} + \overline{QF'} + \overline{F'P}$$

$$= \overline{PF} + \overline{QF} + \overline{QF'} + \overline{PF'}$$

$$= (\overline{PF} + \overline{PF'}) + (\overline{QF} + \overline{QF'})$$

$$= 2\sqrt{k} + 2\sqrt{k}$$

$$= 4\sqrt{k} = 4\sqrt{10}$$

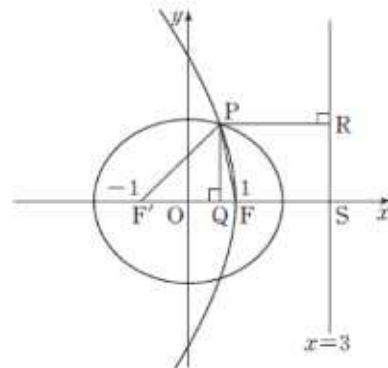
따라서 $k = 10$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 4

$\overline{F'F} = 2$ 이므로 포물선의 준선의 방정식은 $x=3$ 이다.

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q 라 하고, 점 P 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 $x=3$ 과 만나는 점을 R , 직선 $x=3$ 이 x 축과 만나는 점을 S 라 하자.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{F'P} = \overline{PR}$

$$\cos(\angle PF'F) = \frac{5}{7} \text{ 이므로}$$

$$\overline{F'Q} = \frac{5}{7} \overline{F'P}$$

$$\overline{F'S} = \overline{F'Q} + \overline{QS}$$

$$= \frac{5}{7} \overline{F'P} + \overline{F'P}$$

$$= \frac{12}{7} \overline{F'P} = 4$$

$$\text{즉, } \overline{F'P} = \frac{7}{3}$$

$$\overline{F'Q} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{5}{3} \text{ 이므로 삼각형 PF'Q 에}$$

서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\overline{QF} = \overline{FF'} - \overline{F'Q} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

삼각형 FPQ 에서 피타고라스 정리에 의
하여

$$\overline{PF} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}$$

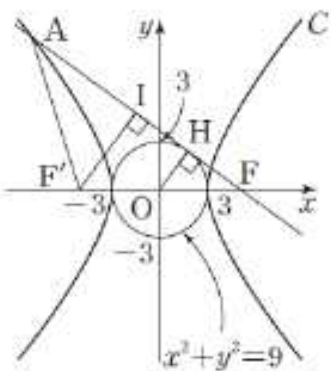
$$\text{따라서 } \overline{PF} + \overline{F'P} = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = 4 \text{ 이므로 이}$$

타원의 장축의 길이는 4 이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

그림과 같이 원점 O와 점 F'에서 직선 AF에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.



원 $x^2 + y^2 = 9$ 가 x 축과 만나는 두 점의

좌표는 $(-3, 0)$, $(3, 0)$ 이므로 쌍곡선 C의
주축의 길이는 6 이다.

삼각형 FOH와 삼각형 FF'I는 서로 닮
은 도형이고 닮음비가 1 : 2이다.

$$\overline{OH} = 3 \text{ 이므로 } \overline{F'I} = 6 \text{ 이다.}$$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{AF} - \overline{AF'} = 6$

$$\overline{AF'} = a \text{ 라 하면}$$

$$\overline{AF} = \overline{AF'} + 6 = a + 6$$

$$\overline{AF'} = \overline{FF'} \text{ 에서 } \overline{AI} = \overline{IF} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AI} = \frac{1}{2} \overline{AF} = \frac{a+6}{2}$$

삼각형 AF'I에서 피타고라스 정리에 의
하여

$$\left(\frac{a+6}{2}\right)^2 + 6^2 = a^2$$

$$a^2 + 12a + 36 + 144 = 4a^2$$

$$a^2 - 4a - 60 = 0, (a-10)(a+6) = 0$$

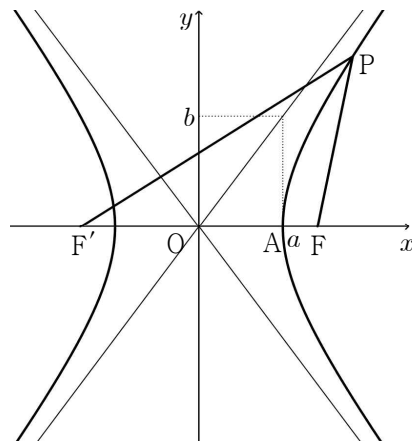
$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 10$$

$\overline{AF} = 16$ 이므로 삼각형 AF'F의 둘레의
길이는

$$16 + 10 + 10 = 36$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] 12



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } a > 0, b > 0 \text{)에서 점 P}$$

선의 방정식이 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 이므로 실수 k에

대하여 $a = 3k$, $b = 4k$ 이다. 또한

$$c^2 = a^2 + b^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

이므로 $c = 5k$ 이고 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 6k$ 이다.

$$10 \leq \overline{PF'} - \overline{PF} \leq 14$$

$$10 \leq 6k \leq 14$$

$$\frac{5}{3} \leq k \leq \frac{7}{3}$$

이다. 두 점 $A(3k, 0)$, $F(5k, 0)$ 이므로 $\overline{AF} = 2k$ 이고

$$\frac{10}{3} \leq 2k \leq \frac{14}{3}$$

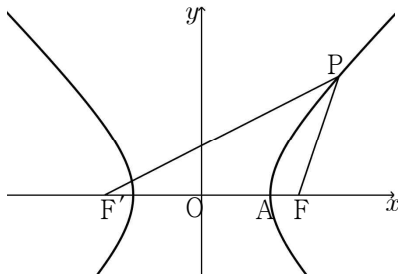
이다. 조건(나)에서 $2k$ 가 자연수이므로

$$2k = 4$$

$$k = 2$$

이다. 그러므로 주축의 길이는 $6k = 12$ 이다.

[다른 풀이]



쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

로 놓으면 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{b}{a}x$

이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \quad b = \frac{4}{3}a \text{ 이다. 조건 (가)에서}$$

$$\overline{PF'} > \overline{PF}$$

이고, 점 P 가 쌍곡선 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$$

이므로

$$\overline{PF} = \overline{PF'} - 2a = 30 - 2a$$

이다. 이때, $16 \leq \overline{PF} \leq 20$ 이므로

$$16 \leq 30 - 2a \leq 20$$

$$5 \leq a \leq 7 \cdots \textcircled{1}$$

점 A 의 좌표는 $(a, 0)$ 이다. 쌍곡선의 정

의에 의하여

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{16}{9}a^2} = \frac{5}{3}a$$

이므로 점 F 의 좌표는 $(\frac{5}{3}a, 0)$ 이고

$$\overline{AF} = \frac{5}{3}a - a = \frac{2}{3}a$$

이다. 조건 (나)에서 선분 AF 의 길이가 자연수이므로 a 는 3 의 배수이어야 한다.

이때 ①에서

$$a = 6$$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$$2a = 12 \text{ 이다.}$$

EBS교재

[정답] ④

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 점근선의 방정식

이 $y = \pm \frac{3}{2}x$ 이고 a 는 양수이므로

$$\frac{3}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\text{즉, } a = 2$$

따라서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \times 2 = 4 \text{ 이고 } \overline{PF'} = 5 \text{ 이므로}$$

$$\overline{PF} = 4 + \overline{PF'} = 4 + 5 = 9$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ⑤

주축의 길이가 4이므로 $a = \pm 2$ 이다.

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 이므로

$$b = \pm 5 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 29 \text{ 이다.}$$

EBS교재

[정답] ③

쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{ 이라 하면}$$

점근선의 방정식은 $y = \pm \sqrt{2}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리,
즉 주축의 길이가 8이므로

$$2a = 8$$

$$\text{즉, } a = 4$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = 4\sqrt{2}$$

그러므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{32} = 1$$

이 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 각각

$$(-\sqrt{16+32}, 0), (\sqrt{16+32}, 0) \text{이다.}$$

즉, $(-4\sqrt{3}, 0), (4\sqrt{3}, 0)$ 이므로 두 초점
사이의 거리는 $8\sqrt{3}$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] $2\sqrt{2}$

$$x^2 - 6x - 2y^2 - 4y + 3 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$$

따라서 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x-3) - 1$$

이고 x 절편을 구하면

$$0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x-3) - 1,$$

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x-3) = 1,$$

$$x-3 = \pm \sqrt{2}, \text{ 즉 } x = 3 \pm \sqrt{2}$$

따라서 x 절편의 차는 $2\sqrt{2}$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 64

$$\text{타원 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{에서 장축의 길이는 } 10$$

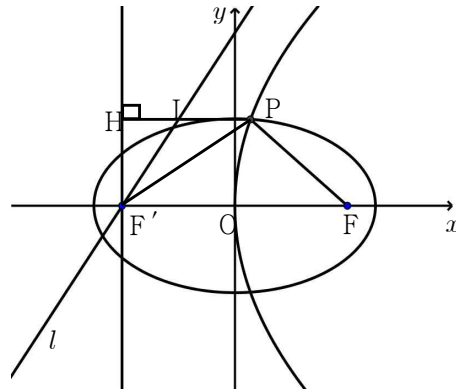
$$\text{이므로 } \overline{PF} + \overline{PF'} = 10$$

점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의
발을 H라 하자. 포물선의 정의에 따라

$$\overline{PH} = \overline{PF} \text{이고}$$

$$|\overline{PF} - \overline{PI}| = |\overline{PH} - \overline{PI}| = \overline{HI} = 2 \text{이므로}$$

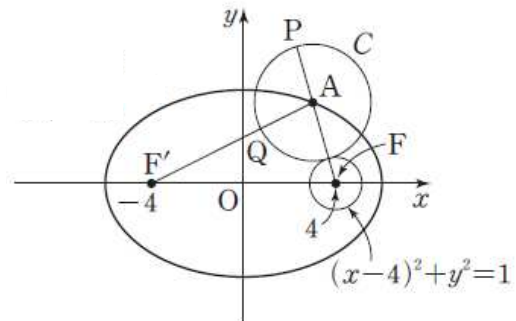
$$\begin{aligned} (\overline{PI} + \overline{PF'})^2 &= (\overline{PH} + \overline{PF'} - \overline{HI})^2 \\ &= (\overline{PF} + \overline{PF'} - 2)^2 = (10 - 2)^2 = 64 \end{aligned}$$



2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 56

그림과 같이 선분 AF의 연장선이 원 C와 만나는 점 중 원 $(x-4)^2 + y^2 = 1$ 과 만나지 않는 점을 P, 선분 AF'이 원 C와 만나는 점을 Q라 하자.



점 F와 원 C 위의 점 사이의 거리의 최
솟값이 $\overline{PF} = 7$ 이고 $\overline{PF} = 1 + 2\overline{AP}$ 이므로
원 C의 반지름의 길이는 3이다. 따라서
 $\overline{AF} = 4$

점 F'과 원 C 위의 점 사이의 거리의
최솟값이 $\overline{F'Q} = 5$ 이고 $\overline{F'Q} = \overline{AF'} - \overline{AQ}$ 이
므로 $\overline{AF'} = 8$ 이다. 따라서 $\overline{AF} + \overline{AF'} = 12$,
즉 $a = 6$

$$a^2 - b^2 = c^2 = 16 \text{이므로 } b^2 = 20$$

$$\text{그러므로 } a^2 + b^2 = 56$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] $4\sqrt{7}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 의 주축의 길이는 4

이고 두 초점은 $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$ 이다.

$\angle FAF' = 90^\circ$ 이므로

$$\overline{AF}^2 + \overline{AF'}^2 = \overline{FF'}^2 = 64$$

$$\overline{AF'} - \overline{AF} = 4 \text{ 이고}$$

$$(\overline{AF'} - \overline{AF})^2 + (\overline{AF'} + \overline{AF})^2 = 2(\overline{AF}^2 + \overline{AF'}^2)$$

이므로

$$(\overline{AF'} + \overline{AF})^2 = 2 \times 64 - 16 = 112$$

$$\text{따라서 } \overline{AF'} + \overline{AF} = 4\sqrt{7}$$

11. 평면곡선의 접선

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

$x^2 + y^2 + axy + b = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(axy) + \frac{d}{dx}(b) = 0$$

$$\dots\dots ㉠$$

합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2) \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

곱의 미분법과 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(axy) = ay + ax \frac{d}{dx}(y) = ay + ax \frac{dy}{dx}$$

$$㉠ \text{에서 } 2x + 2y \frac{dy}{dx} + ay + ax \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\text{즉 } \frac{dy}{dx} = -\frac{ay + 2x}{2y + ax} \text{ (단, } 2y + ax \neq 0 \text{)}$$

한편, 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 -4 이므로

$$-\frac{3a + 4}{6 + 2a} = -4 \text{에서 } a = -4 \quad \dots\dots ㉡$$

또한 곡선 $x^2 + y^2 + axy + b = 0$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$4 + 9 + a \times 2 \times 3 + b = 0 \text{에서 } 6a + b = -13$$

$$\dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $a = -4, b = 11$ 이므로

$$a + b = -4 + 11 = 7$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

$$x = t^3, y = t - t^2 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠에서

$$x = 8 \text{ 일 때, } 8 = t^3 \text{ 이므로 } t = 2 \text{ 이고}$$

$$y = 2 - 2^2 = -2 \text{ 이므로 } a = -2$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2, \frac{dy}{dt} = 1 - 2t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - 2t}{3t^2} \text{ (단, } t \neq 0 \text{)} \quad \dots\dots ㉡$$

점 $(8, -2)$ 에서의 접선의 기울기는 $t = 2$

일 때, ㉡에서 $\frac{1 - 2 \times 2}{3 \times 2^2} = -\frac{1}{4}$ 이므로 접선

의 방정식은

$$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 8), y = -\frac{1}{4}x,$$

$$\text{즉 } f(x) = -\frac{1}{4}x$$

따라서 $f(a)$ 에서 $a = -2$ 이므로

$$f(-2) = -\frac{1}{4} \times (-2) = \frac{1}{2}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

$$x = \sqrt{t} + a, y = \ln t + t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{2\sqrt{t}(t+1)}{t}$$

$t = 1$ 일 때, 접선의 기울기는

$$\frac{2(1+1)}{1} = 4 \text{ 이고, 접점의 좌표는}$$

$$(1+a, 1) \text{ 이므로 접선의 방정식은}$$

$$y = 4(x - 1 - a) + 1$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는

$$A\left(\frac{3}{4}+a, 0\right), B(0, -3-4a)$$

삼각형 OAB의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}+a\right) \times (3+4a) = 8$$

$$(3+4a)^2 = 64$$

$$3+4a=8 \text{ 또는 } 3+4a=-8$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{ 이므로 } a = \frac{5}{4}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

$y^2 = 9x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} = 9$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

두 방정식 $y^2 = 9x$, $x = a$ 를 연립하면 $y^2 = 9a$ 에서

$$y = -3\sqrt{a} \text{ 또는 } y = 3\sqrt{a}$$

따라서 점 A의 y좌표를 양수라 하면 포물선 $y^2 = 9x$ 와 직선 $x = a$ 가 만나는 서로 다른 두 점 A, B의 좌표는

$$A(a, 3\sqrt{a}), B(a, -3\sqrt{a})$$

포물선 위의 점 A(a, $3\sqrt{a}$)에서의 접선 l_1 의 기울기는 $\frac{3}{2\sqrt{a}}$ 이고,

포물선 위의 점 B(a, $-3\sqrt{a}$)에서의 접선 l_2 의 기울기는 $-\frac{3}{2\sqrt{a}}$ 이다.

두 직선 l_1, l_2 가 서로 수직이면

$$\frac{3}{2\sqrt{a}} \times \left(-\frac{3}{2\sqrt{a}}\right) = -1 \text{ 이므로 } \frac{9}{4a} = 1$$

$$\text{따라서 } a = \frac{9}{4}$$

[다른 풀이]

포물선 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$) 위의 점

(x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2p(x + x_1) \text{ 임을 이용하자.}$$

두 방정식 $y^2 = 9x$, $x = a$ 를 연립하면

$$y^2 = 9a \text{ 에서}$$

$$y = -3\sqrt{a} \text{ 또는 } y = 3\sqrt{a}$$

따라서 점 A의 y좌표를 양수라 하면 포물선 $y^2 = 9x$ 와 직선 $x = a$ 가 만나는 서로 다른 두 점 A, B의 좌표는

$$A(a, 3\sqrt{a}), B(a, -3\sqrt{a})$$

포물선 위의 점 A(a, $3\sqrt{a}$)에서의 접선 l_1 의 방정식은

$$3\sqrt{a}y = \frac{9}{2}(x+a) \text{ 이므로 접선 } l_1 \text{의 기울}$$

$$\text{기는 } \frac{3}{2\sqrt{a}} \text{ 이고,}$$

포물선 위의 점 B(a, $-3\sqrt{a}$)에서의 접선 l_2 의 방정식은 $-3\sqrt{a}y = \frac{9}{2}(x+a)$ 이므

로 접선 l_2 의 기울기는 $-\frac{3}{2\sqrt{a}}$ 이다.

두 직선 l_1, l_2 가 서로 수직이면

$$\frac{3}{2\sqrt{a}} \times \left(-\frac{3}{2\sqrt{a}}\right) = -1 \text{ 이므로 } \frac{9}{4a} = 1$$

$$\text{따라서 } a = \frac{9}{4}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ④

$$\frac{dx}{dt} = 2t \text{ 이고 } \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 1}{2t} \text{ 이다.}$$

$$t = 1 \text{ 을 대입하면 } \frac{dy}{dx} = 2 \text{ 이다.}$$

EBS교재

[정답] ⑤

$$x = t^2 - 1 \text{ 에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

$$y = t^3 + at \text{ 에서}$$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 + a \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + a}{2t} \quad (\text{단, } t \neq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$t = -1$ 일 때, 접선의 기울기가 1이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{3+a}{-2} = 1$$

따라서 $a = -5$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] $4\sqrt{6}$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ 에서}$$

$$x^2 + 2y^2 = 8$$

위 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(2y^2) = \frac{d}{dx}(8) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(2y^2) = \frac{d}{dy}(2y^2) \frac{dy}{dx} = 4y \frac{dy}{dx}$$

이므로 $\textcircled{1}$ 은

$$2x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{즉, } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

점 $(-2, \sqrt{2})$ 에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 2)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2}$$

주축이 x 축 위에 놓여있는 원점을 지나
는 쌍곡선은 한 꼭짓점이 원점이므로 점근
선의 x 절편과 원점 사이의 거리가 주축의
길이의 절반이다. 또한 점근선이 x 축과 만
나는 점이 쌍곡선의 중심이므로 구하고자
하는 쌍곡선의 방정식은 다음과 같이 둘 수
있다.

$$\frac{(x+4)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

이때 위에서 구한 점근선의 x 절편이 -4
이므로 주축의 길이는 8, 즉 $a = 4$

쌍곡선의 점근선의 기울기가

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b}{a} = \frac{b}{4} \text{ 이므로 } b = 2\sqrt{2} \text{ 따라서}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 8 = 24, \text{ 즉 } c = 2\sqrt{6} \text{ 이}$$

고 두 초점 사이의 거리는 $2c = 4\sqrt{6}$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] -3

$x = 2\cos\theta, y = 3\sin\theta$ 에서

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{3\cos\theta}{2\sin\theta} \quad (\text{단, } \sin\theta \neq 0)$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때의 접선의 기울기는

$$-\frac{3\cos\frac{\pi}{3}}{2\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, $x = 2\cos\theta = 1,$

$$y = 3\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고 점 $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 을

지나는 접선의 방정식은

$$y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 1)$$

$$\text{즉, } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$$

그러므로 $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}, b = 2\sqrt{3}$

즉 $ab = -3$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 98

쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 양변을

x 에 대하여 미분하여 정리하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{4y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

점 $A(a, b)$ 에서의 접선에 수직이고 점 A 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{-4b}{3a}(x-a) + b = \frac{-4b}{3a}x + \frac{7b}{3}$$

이므로 이 직선의 x 절편은 $\frac{7a}{4}$ 이다.

$$\text{따라서 } f(x) = 3x, \quad g(b) = \frac{7b}{3},$$

$$h(a) = \frac{7a}{4} \text{ 이므로}$$

$$f(2) \times g(2) \times h(2) = 6 \times \left(\frac{14}{3}\right) \times \left(\frac{14}{4}\right) = 98$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 8

$$x = t^3 + 2t, \quad y = nt + \ln t \text{ 에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2, \quad \frac{dy}{dt} = n + \frac{1}{t}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{n + \frac{1}{t}}{3t^2 + 2}$$

$x = 3$ 인 t 를 구하면

$$t^3 + 2t = 3, \quad t^3 + 2t - 3 = 0$$

$$(t-1)(t^2 + t + 3) = 0$$

$$\therefore t = 1$$

$t = 1$ 일 때

$$f'(3) = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = \frac{n+1}{5} < 2$$

를 만족시키려면 $n < 9$ 이어야 한다.

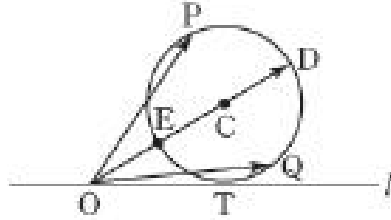
따라서 구하는 모든 자연수 n 의 개수는 8이다.

VI. 평면벡터

12. 벡터의 연산

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①



그림과 같이 원의 중심을 C 라 하고 직선 OC 가 원과 만나는 점을 각각 D, E 라 하자.

$$\overline{CT} = 2, \quad \overline{OT} = 3 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \sqrt{\overline{OT}^2 + \overline{CT}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

그림과 같이 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 의 값이 최대가 되는 것은 두 점 P, Q 가 모두 점 D 의 위치에 있을 때이므로

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| &\leq |\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}| \\ &= 2|\overrightarrow{OD}| \end{aligned}$$

마찬가지로 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 의 값이 최소가 되는 것은 두 점 P, Q 가 모두 점 E 의 위치에 있을 때이다.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| &\geq |\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OE}| \\ &= 2|\overrightarrow{OE}| \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} 2|\overrightarrow{OD}| &= 2(|\overrightarrow{OC}| + 2) \\ &= 2(\sqrt{13} + 2) \\ 2|\overrightarrow{OE}| &= 2(|\overrightarrow{OC}| - 2) \\ &= 2(\sqrt{13} - 2) \end{aligned}$$

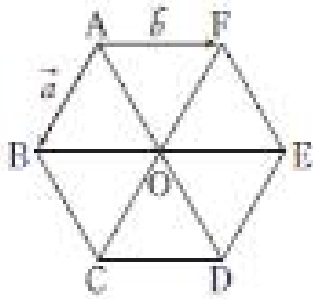
이므로

$$\begin{aligned} Mm &= 2(\sqrt{13} + 2) \times 2(\sqrt{13} - 2) \\ &= 4(13 - 4) \\ &= 36 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} \\ &= \overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= \vec{b} + 2\vec{a}\end{aligned}$$

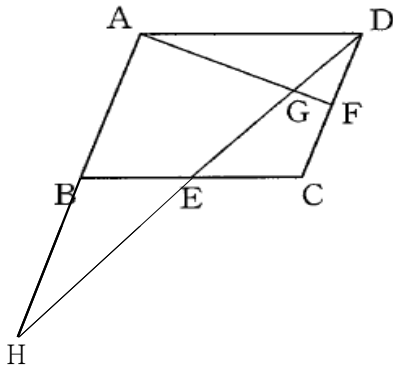
정육면체의 가장 긴 대각선의 교점을 O 라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AO} \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) \\ &= 2(\vec{a} + \vec{b}) \\ \therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= (\vec{b} + 2\vec{a}) + (2\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= 4\vec{a} + 3\vec{b}\end{aligned}$$

$$\therefore mn = 4 \times 3 = 12$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④



두 직선 AB와 DE의 교점을 H라 하면
두 삼각형 GAH와 GFD는 닮음비가
4:1인 닮음이다.

$$\begin{aligned}\text{그러므로} \\ \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{HD} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}(\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{2}{5}$, $n = \frac{4}{5}$ 이므로

$$m + n = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 라 하고 $\overline{AB}$ 의 중점을
M이라 두면

$\overrightarrow{BC}$ 와 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ 은 평행하고

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{BC} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b})$$

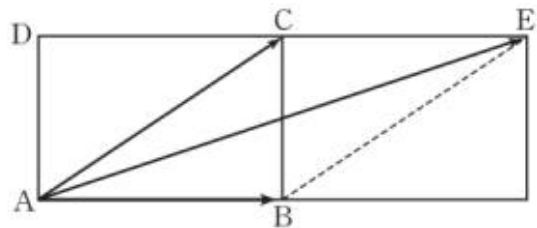
$$= \frac{\sqrt{3}+3}{3}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}-3}{3}\vec{b}$$

$$m = \frac{\sqrt{3}+3}{3}, n = \frac{\sqrt{3}-3}{3} \text{ 이므로}$$

$$mn = -\frac{2}{3}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ③



점 P가 선분 CD위를 움직일 때,
 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}|$ 는 점 P가 점 C에 있을 때 최
대이다.

따라서 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}|$ 의 최댓값은 그림에서
 $\overrightarrow{AE}$ 의 크기이므로

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

$|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{PB}| = \overline{PB}$ 는 점 P가 점
C에 있을 때 최소이므로 $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP}|$ 의 최

숫값은 2이다.

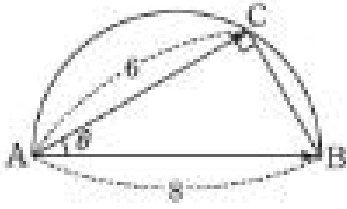
따라서 구하는 합은

$$2\sqrt{10} + 2 = 2(\sqrt{10} + 1)$$

13. 평면벡터의 성분과 내적

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④



그림에서 $\angle CAB = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓자.

$\angle ACB$ 는 반원의 원주각이므로

$$\angle ACB = 90^\circ$$

삼각형 ABC에서 $BC = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \cos \theta \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AB}| \cos \theta = |\overrightarrow{AC}|^2 = 36$$

두 벡터 $\overrightarrow{BC}$ 와 $\overrightarrow{AB}$ 가 이루는 각의 크기

$$\text{는 } \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2} + \theta \text{ 이므로}$$

$$2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 2|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{AB}| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$= -2|\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{AB}| \sin \theta$$

$$= -2|\overrightarrow{BC}|^2$$

$$= -2 \times (2\sqrt{7})^2 = -56$$

따라서

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 36 + (-56) = -20$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$$|\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}|^2 = (\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) \text{ 이므로}$$

$$|\overrightarrow{a}|^2 + 4\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 4|\overrightarrow{b}|^2 = 16$$

$$2^2 + 4\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + 4 \times 3^2 = 16$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -6$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

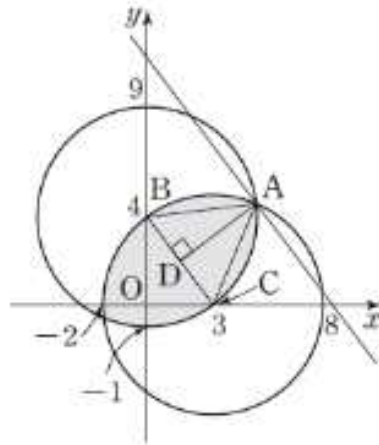
$$|\overrightarrow{a}| \leq 5 \text{ 에서 } x^2 + (y-4)^2 \leq 25$$

$$|\overrightarrow{b}| \leq 5 \text{ 에서 } (x-3)^2 + y^2 \leq 25$$

따라서 조건을 만족시키는 두 실수 x, y 에 대하여 점 (x, y) 는 두 원

$x^2 + (y-4)^2 = 25$, $(x-3)^2 + y^2 = 25$ 의 내부의 공통부분에 있다.

(단, 경계선 포함)



$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = k \text{ 라 하면}$$

$$xy + (y-4)(3-x) = k, 4x + 3y - 12 - k = 0$$

그림과 같이 직선 $4x + 3y - 12 - k = 0$ 이 두 원의 교점 중 하나인 점 A를 지날 때 k 의 값이 최대이다.

원 $x^2 + (y-4)^2 = 25$ 의 중심을 B(0, 4), 원 $(x-3)^2 + y^2 = 25$ 의 중심을 C(3, 0)이라 하고, 선분 BC의 중점을 D라 하면 $\overline{AD}$ 는 한 변의 길이가 5인 정삼각형의 높이이므로

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

이때 직선 BC와 직선

$4x + 3y - 12 - k = 0$ 이 서로 평행하므로 점 (0, 4)와 직선 $4x + 3y - 12 - k = 0$ 사이

의 거리는 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$$\text{즉, } \frac{|0 + 12 - 12 - k|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ 이므로}$$

$$k = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 에서 점 P는 $\angle APB = 90^\circ$ 를 만족시키는 점이므로 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원 위의 점이다.

선분 AB의 중점의 좌표가 (5, 2)이고, $\overline{AB} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$ 이므로 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 20$$

이다.

점 (5, 2)와 원점 사이의 거리가 $\sqrt{29}$ 이므로

$$M = \sqrt{29} + 2\sqrt{5}, m = \sqrt{29} - 2\sqrt{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} Mm &= (\sqrt{29} + 2\sqrt{5})(\sqrt{29} - 2\sqrt{5}) \\ &= 29 - 20 = 9 \end{aligned}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ④

$\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (1, 1)$ 이므로

$\vec{a} + \vec{b} = (3, 5)$ 이다.

따라서 모든 성분의 합은 $3+5=8$ 이다.

EBS연계 기출분석 2

[정답] ⑤

두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{v} + \vec{b}$ 가 서로 평행하므로 임의의 실수 t 에 대하여 $t\vec{a} = (\vec{v} + \vec{b})$ 이다.

$\vec{v} = (x, y)$ 라 하면

$$(3t, t) = (x+4, y-2) \text{에서}$$

$$x = 3t - 4, y = t + 2 \text{이다.}$$

$$|\vec{v}|^2 = x^2 + y^2 = (3t-4)^2 + (t+2)^2$$

$$= 10(t-1)^2 + 10 \text{이므로}$$

$t = 1$ 일 때 최솟값 10을 갖는다.

EBS교재

[정답] ③

$\vec{p} = (x, y)$ 로 놓으면

$$\vec{p} + \vec{c} = (x+1, y-3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2, -2)$$

$$\vec{p} + \vec{c} = k(\vec{a} - \vec{b}) \quad (k \neq 0) \text{이므로}$$

$$(x+1, y-3) = k(2, -2)$$

$$x+1 = 2k, y-3 = -2k$$

그러므로

$$x = 2k-1, y = -2k+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\vec{p} - \vec{c} = (x-1, y+3) \text{이므로}$$

$$|\vec{p} - \vec{c}|^2 = 8 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 8$$

$$(2k-2)^2 + (-2k+6)^2 = 8$$

$$(k-1)^2 + (k-3)^2 = 2$$

$$2k^2 - 8k + 10 = 2$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$(k-2)^2 = 0$$

$$\text{즉, } k = 2$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x = 3, y = -1$$

$$\text{따라서 } \vec{p} = (3, -1) \text{이므로}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

EBS연계 기출분석 3

[정답] 52

직선의 방향벡터가 (2, 3)이므로

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{3} \text{에서 } y-3 = \frac{3}{2}(x-6)$$

이므로 점 A의 좌표는 (4, 0)이고 점 B의 좌표는 (0, -6)이다.

$$\text{따라서 } \overline{AB}^2 = 4^2 + (-6)^2 = 52 \text{이다.}$$

EBS교재

[정답] ④

좌표평면 위의 점 (2, 4)를 지나고 벡터

$\vec{u} = (1, 3)$ 에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3}, x-2 = \frac{y-4}{3}$$

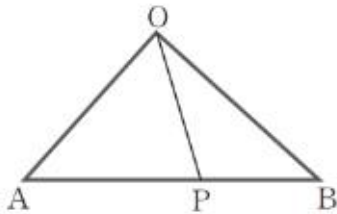
이 직선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$y = 0 \text{일 때 } x-2 = -\frac{4}{3}$$

따라서 $x = \frac{2}{3}$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③



$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} = \frac{3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}}{3+2}$$

이므로 점 P는 선분 AB를 3:2로 내분하는 점이다.

따라서 $\overline{AP} = \frac{3}{5}\overline{AB}$ 이므로

$$\triangle OAP = \frac{3}{5}\triangle OAB$$

$$\therefore k = \frac{3}{5}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$

이고, $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 2$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

두 벡터 $2\vec{a} + t\vec{b}$ 가 $\vec{a}$ 가 수직이므로

$$(2\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$$

따라서 $2\vec{a} \cdot \vec{a} + t(\vec{b} \cdot \vec{a}) = 0$ 이므로

$$t = -\frac{2\vec{a} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = -\frac{2|\vec{a}|^2}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = -\frac{2 \times 3}{3} = -2$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤

$\overrightarrow{OP} = \vec{p}, \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 라 하면 선분

OP는 원의 반지름이므로 $|\vec{p}| = 4$ 이고 점

O가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 의 내적은

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (\vec{a} - \vec{p}) \cdot (\vec{b} - \vec{p}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{p} + |\vec{p}|^2 \\ &= -\frac{2}{3} - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{p} + 16 \\ &= \frac{46}{3} - (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{p} \end{aligned}$$

그러므로 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 값은 $\vec{a} + \vec{b}$ 와 $\vec{p}$ 가 이루는 각의 크기가 π 인 경우에 최대이다.

점 O에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AOH는 직각삼각형이므로

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 2\overline{OH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{p} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 4 \times \cos \pi = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

따라서 최댓값은 $\frac{46 + 8\sqrt{3}}{3}$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ④

두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

라 하면

$$\vec{u}_1 = (-2, 3), \vec{u}_2 = (1, a)$$

두 직선 l_1, l_2 가 서로 수직이므로

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

즉, $(-2, 3) \cdot (1, a) = -2 + 3a = 0$ 이므로

$$a = \frac{2}{3}$$

14. 평면 운동

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

$x = \sqrt{2} \cos t + 1$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2} \sin t$$

$$y = 2 \sin t \text{ 에서}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cos t$$

$$\text{이므로 } \vec{v} = (-\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t)$$

$$\overrightarrow{OP} = (\sqrt{2} \cos t + 1, 2 \sin t) \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{OP} \text{ 와 점 P 의 속도 } \vec{v} \text{ 가 서로 수직이면}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}$$

$$= (\sqrt{2} \cos t + 1, 2 \sin t) \cdot (-\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t)$$

$$= -\sqrt{2} \sin t (\sqrt{2} \cos t + 1) + 2 \sin t \times 2 \cos t$$

$$= 2 \sin t \cos t - \sqrt{2} \sin t$$

$$= \sqrt{2} \sin t (\sqrt{2} \cos t - 1) = 0$$

$$0 < t < \pi \text{ 에서 } \sin t > 0 \text{ 이므로}$$

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로 } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{따라서 } \tan \alpha = 1$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

점 P 의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 3t + 1, y = t^3 - 2t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3, \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = 6t$$

즉, 점 P 의 시각 t 에서의 속도와 가속도를 각각 $\vec{v}, \vec{a}$ 라 하면

$$\vec{v} = (3, 3t^2 - 2), \vec{a} = (0, 6t)$$

$$\text{이때 점 P 의 속력이 5 이므로 } |\vec{v}| = 5 \text{ 에서}$$

$$\sqrt{9 + (3t^2 - 2)^2} = 5$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(3t^2 - 2)^2 = 16$$

$$3t^2 - 2 = 4 \text{ 또는 } 3t^2 - 2 = -4$$

$$t \geq 0 \text{ 인 실수이므로}$$

$$t^2 = 2, t = \sqrt{2}$$

따라서 시각 $t = \sqrt{2}$ 에서의 가속도는

$$\vec{a} = (0, 6\sqrt{2}) \text{ 이므로 가속도의 크기는}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{0 + (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

$$x = e^t, y = f(t) \text{ 에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

점 P 가 점 (1, f(0)) 으로부터 시각 t 일 때까지 움직인 거리가 $e^t + t^2 - 1$ 이므로

$$\int_0^t \sqrt{e^{2s} + \{f'(s)\}^2} ds = e^t + t^2 - 1$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\sqrt{e^{2t} + \{f'(t)\}^2} = e^t + 2t$$

$$\text{즉, } e^{2t} + \{f'(t)\}^2 = (e^t + 2t)^2$$

$$\text{이므로 } \{f'(t)\}^2 = 4te^t + 4t^2$$

따라서

$$\{f'(1)\}^2 = 4e + 4$$

$$= 4(e + 1)$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

조건 (가)에 의하여

$$\{f(x)\}^2 - 4\{f'(x)\}^2 = 4 \text{ 이므로}$$

$$4\{f'(x)\}^2 = \{f(x)\}^2 - 4$$

$$\{f(x)\}^2 - 4 \geq 0 \text{ 에서}$$

$$\{f(x) - 2\}\{f(x) + 2\} \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) \leq -2 \text{ 또는 } f(x) \geq 2$$

조건 (나)에서 $a > 0$ 이고 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(x) \geq 2$$

$$1 + \{f'(x)\}^2 = \frac{1}{4}\{f(x)\}^2 \text{ 이므로}$$

$x = 0$ 에서 $x = 3$ 까지 곡선 $y = f(x)$ 의 길이는

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{4}\{f(x)\}^2} dx$$

$$= \int_0^3 \frac{1}{2} |f(x)| dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 f(x) dx$$

$$= \frac{a}{2}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

$x = 2t + 1$, $y = t^3 - t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 6t \text{ 이므로 } t = 1 \text{ 에서의 점}$$

P의 가속도는 (0, 6)이다.

따라서 $t = 1$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는 $|(0, 6)| = \sqrt{0+36} = 6$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

$$|\vec{v}| = \sqrt{(e^t + 2e^{-t})^2 + (e^t - 2e^{-t})^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t} + 4 + 4e^{-2t} + e^{2t} - 4 + 4e^{-2t}}$$

$$= \sqrt{2e^{2t} + 8e^{-2t}}$$

$$\geq \sqrt{2\sqrt{16}} = 2\sqrt{2}$$

등호는 $2e^{2t} = 8e^{-2t}$ 일 때, 즉

$e^{2t} = 2$, $t = \ln \sqrt{2}$ 일 때 성립하고 속력의 최솟값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 4

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t$$

이므로

$t = 0$ 에서 $t = 2$ 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$$s = \int_0^2 \sqrt{\left(-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t\right)^2} dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2} t\right)} dt$$

$$= \pi \int_0^2 \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2} t}{2}} dt$$

$$= \pi \int_0^2 \sqrt{\frac{1 + 2\cos^2 \frac{\pi}{4} t - 1}{2}} dt$$

$$= \pi \int_0^2 \cos \frac{\pi}{4} t dt \left(\because 0 \leq t \leq 2 \text{에서 } \cos \frac{\pi}{4} t \geq 0 \right)$$

$$= \pi \left[\frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} t \right]_0^2 = \pi \times \frac{4}{\pi} = 4$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ③

$$y = \frac{1}{3}(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}} \text{에서}$$

$$y' = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} \times 2x = x\sqrt{x^2 - 2}$$

구하는 곡선의 길이를 l 이라 하면

$$l = \int_2^3 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= \int_2^3 \sqrt{1 + (x\sqrt{x^2 - 2})^2} dx$$

$$= \int_2^3 \sqrt{1 + x^2(x^2 - 2)} dx$$

$$= \int_2^3 \sqrt{(x^2 - 1)^2} dx$$

$$= \int_2^3 (x^2 - 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_2^3$$

$$= (9 - 3) - \left(\frac{8}{3} - 2 \right)$$

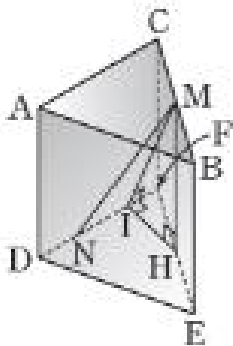
$$= \frac{16}{3}$$

VII. 공간도형과 공간벡터

15. 공간도형

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①



점 M에서 평면 DEF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH} \perp (\text{평면 DEF}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 H에서 선분 DF에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{HI} \perp \overline{DF} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{MI} \perp \overline{DF}$$

$$\overline{FH} = 3 \text{이므로 } \overline{HI} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \overline{FI} = \frac{3}{2}$$

직각삼각형 MHI에서 $\overline{MH} = 6$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{MI} &= \sqrt{\overline{MH}^2 + \overline{HI}^2} \\ &= \sqrt{6^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{171}}{2} \end{aligned}$$

또한

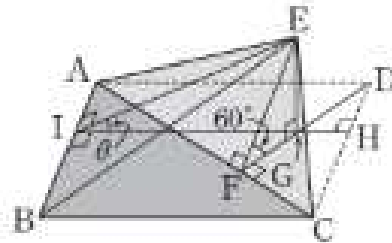
$$\begin{aligned} \overline{IN} &= 6 - \overline{DN} - \overline{FI} \\ &= 6 - 2 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

이므로 직각삼각형 MNI에서

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \sqrt{\overline{MI}^2 + \overline{IN}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{171}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{196}{4}} \\ &= 7 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤



선분 AC 위에 $\overline{AC} \perp \overline{DF}, \overline{AC} \perp \overline{EF}$ 를 만족시키는 점을 F라 하면

$$\angle EFD = 60^\circ$$

또한

$$\frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{EF}$$

$$4 \times 2 = 2\sqrt{5} \times \overline{EF}$$

$$\text{즉, } \overline{EF} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ 이므로 } \overline{DF} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ 이다.}$$

또한 점 E에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발 G는 선분 DF 위에 있고

$$\begin{aligned} \overline{FG} &= \overline{EF} \cos 60^\circ \\ &= \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\overline{GD} = \overline{DF} - \overline{FG} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

그리고 점 G에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned} \overline{DF} : \overline{CD} &= \overline{DH} : \overline{GD} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} : 2 &= \overline{DH} : \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 2\overline{DH} &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \overline{DH} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \overline{GH} &= \sqrt{\overline{GD}^2 - \overline{DH}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{5} - \frac{16}{25}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5}$$

또한 점 E에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의하여

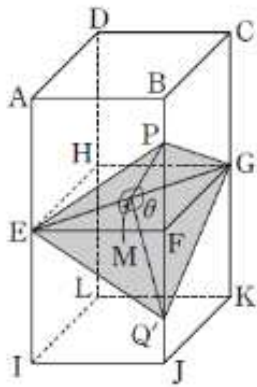
$$\overline{AB} \perp \overline{GI}$$

따라서 $\angle EIG = \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\overline{EG}}{\overline{IG}} \\ &= \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} \times \sin 60^\circ}{4 - \frac{2}{5}} \\ &= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}{\frac{18}{5}} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{9} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ⑤



그림과 같이 정육면체 ABCD-EFGH와 한 면을 공유하는 정육면체 EFGH-IJKL에서 선분 FJ를 2:1로 내분하는 점을 Q'이라 하면 두 평면 QCA와 Q'GE가 서로 평행하므로 두 평면 PEG와 QCA가 이루는 예각의 크기는 두 평면 PEG와 Q'GE가 이루는 예각의 크기와 같다.

이때 선분 EG의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 PEG, Q'GE가 모두 이등변삼각형이므로

$$\overline{PM} \perp \overline{EG}, \overline{Q'M} \perp \overline{EG}$$

따라서 두 평면 PEG와 Q'GE가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\theta = \angle PMQ'$$

한편, 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 $6a$ 라 하면

$$\overline{PF} = \frac{2}{3}\overline{BF} = \frac{2}{3} \times 6a = 4a$$

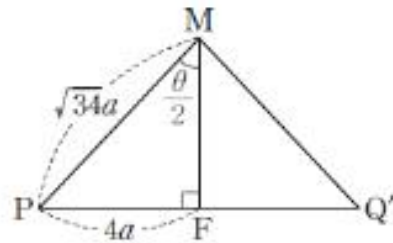
삼각형 PEG에서

$$\begin{aligned} \overline{PE} &= \overline{PG} = \sqrt{(6a)^2 + 6^2 + (4a)^2} = 2\sqrt{13}a, \\ \overline{EG} &= 6\sqrt{2}a \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{PM} &= \sqrt{\overline{PE}^2 - \overline{EM}^2} \\ &= \sqrt{\overline{PE}^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{EG}\right)^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{13}a)^2 - (3\sqrt{2}a)^2} \\ &= \sqrt{52a^2 - 18a^2} = \sqrt{34}a \end{aligned}$$

마찬가지로 $\overline{Q'M} = \sqrt{34}a$



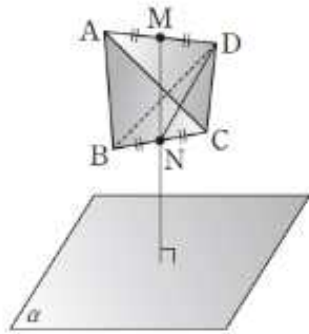
이때 $\overline{MF} \perp \overline{PQ'}$ 이고 $\angle PMF = \frac{\theta}{2}$ 이므로

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{4a}{\sqrt{34}a} = \frac{4}{\sqrt{34}}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③



$\angle DNM = \theta$ 라 하면 점 M에서 평면 BCD에 내린 수선의 발이 선분 DN 위에 있으므로 직선 MN과 평면 BCD가 이루는 예각의 크기가 θ 이다.

이때 삼각형 NDA가 $\overline{ND} = \overline{NA}$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle NMD = 90^\circ$ 이다.

직각삼각형 NDM에서

$$\overline{ND} = 2\sqrt{3}, \overline{DM} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{ND}^2 - \overline{DM}^2} = \sqrt{12 - 4} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } \cos\theta = \frac{\overline{MN}}{\overline{ND}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

한편, 직선 MN과 평면 α 가 서로 수직이므로 평면 BCD와 평면 α 가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 이다.

이때 정삼각형 BCD의 넓이는

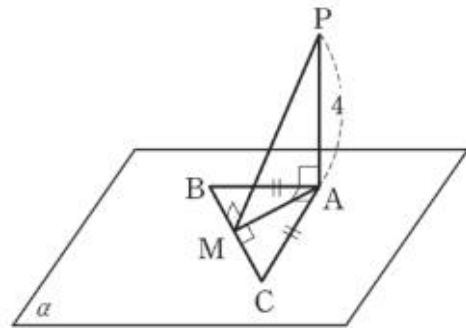
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\begin{aligned} 4\sqrt{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= 4\sqrt{3} \times \sin\theta \\ &= 4\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②



점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼수선의 정리에 의해

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}$$

삼각형 ABC는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이므로 점 M은 선분 BC의 중점이다.

$$\overline{BC} = 6 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 3$$

$\overline{PA} = 4$ 이므로 직각삼각형 PAM에서

$$\overline{PM} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AM}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

[다른 풀이]

점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼수선의 정리에 의해

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}$$

직각이등변삼각형 ABC에서

$$\overline{AB} = \overline{AC} = 3\sqrt{2} \text{ 이고, } \overline{AM} = x \text{ 라 하면}$$

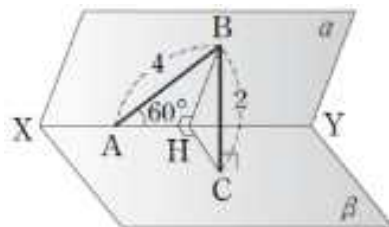
$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 6 \times x \text{ 에서 } x = 3$$

이때, $\overline{PA} = 4$ 이므로 직각삼각형 PAM에서

$$\overline{PM} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AM}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②



점 B에서 교선 XY에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BH} = 4\sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

또한, $\overline{BH} \perp \overline{XY}$, $\overline{BC} \perp \beta$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{CH} \perp \overline{XY}$$

따라서 $\angle BHC = \theta$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BH}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

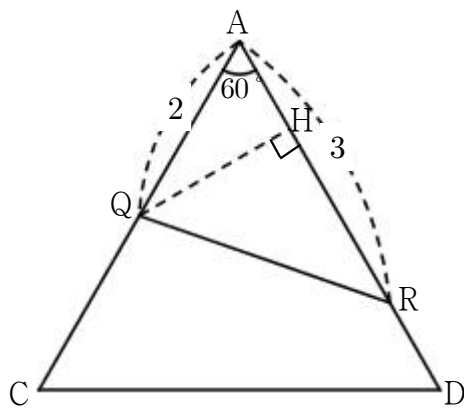
2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

$\overline{AP} = \overline{AQ} = 2$, $\overline{AR} = \overline{AS} = 3$ 이고 삼각형 APQ와 ARS는 정삼각형이므로

$$\overline{PQ} = 2, \overline{RS} = 3$$

또 삼각형 AQR에서



$$\overline{QH} = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\overline{HA} = 2\cos 60^\circ = 1$$

$$\overline{RH} = 3 - 1 = 2$$

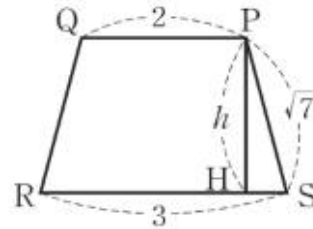
삼각형 QRH에서

$$\overline{QR} = \sqrt{(\overline{QH})^2 + (\overline{RH})^2} = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}$$

두 삼각형 AQR과 APS는 서로 합동이므로 $\overline{PS} = \sqrt{7}$ 이다.

따라서

사각형 PQRS는 아래 그림과 같은 등변 사다리꼴이다.



등변사다리꼴 PQRS의 높이를 h라 하면 그림에서

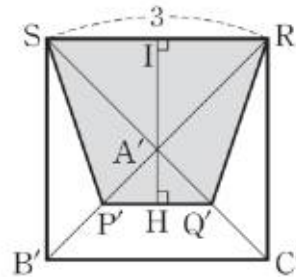
$$h^2 = (\sqrt{7})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

$$\therefore h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서

등변사다리꼴 PQRS의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} (2 + 3) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$



두 점 R, S를 지나고 밑변에 평행한 평면이 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 B', C'이라 하면

평면 PQRS와 평면 B'C'RS가 이루는 각이 θ 이다.

점 A, P, Q의 평면 B'C'RS 위로의 정사영을 각각 A', P', Q'이라 하자.

이때 A'은 두 대각선 B'R, C'S의 교점이고

$\overline{AP} : \overline{PB'} = \overline{P'Q'} : \overline{B'C'} = 2 : 1$ 이므로 점 P', Q'은 각각 선분 A'B', A'C'을 각각 2 : 1로 내분하는 점이다.

$$\overline{A'P'} : \overline{A'B'} = \overline{P'Q'} : \overline{B'C'} = 2 : 3$$

또 점 A' 에서 선분 $P'Q'$ 과 RS 에 내린 수선의 발을 각각 H, I 라 하면

$$\therefore \overline{\text{HI}} = \frac{5}{2}$$

$$T = \frac{1}{2} \times (2 + 3) \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$$
$$\cos \theta = \frac{T}{S} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{15\sqrt{3}}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$
$$\overline{OH} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$
$$\overline{\text{PR}} = \frac{1}{3} \times \overline{\text{OH}} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$
$$\overline{QS} = \frac{2}{3} \times \overline{OH} = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$
$$\overline{QT} = \overline{QS} - \overline{ST} = \overline{QS} - \overline{PR} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$
$$\therefore \tan \theta = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 53 -

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

점 A(2, 3, -1)에서 x축에 내린 수선의 발 P의 좌표는 P(2, 0, 0)

점 A(2, 3, -1)을 zx 평면에 대하여 대칭 이동한 점 Q의 좌표는 Q(2, -3, -1)

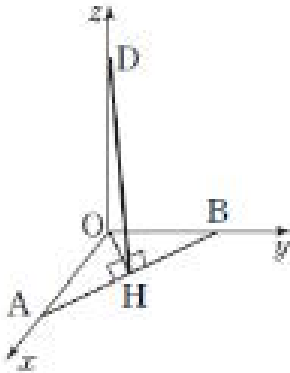
$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(2-2)^2 + 3^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

점 D(0, 0, 4)에서 xy 평면에 내린 수선의 발은 원점 O이고 원점 O에서 두 점 A(2, 0, 0), B(0, 2, 0)을 잇는 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{DH} \perp \overline{AB}$$



따라서 점 C가 점 H의 위치에 있을 때 두 점 C, D 사이의 거리가 최소가 된다.

이때 점 H는 선분 AB의 중점이므로

$$H\left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}, 0\right)$$

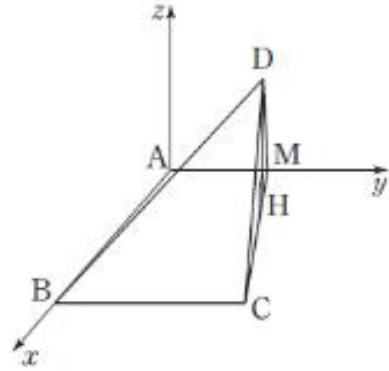
즉, H(1, 1, 0)이다.

따라서 두 점 C, D 사이의 거리의 최솟값은

$$\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = 3\sqrt{2}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

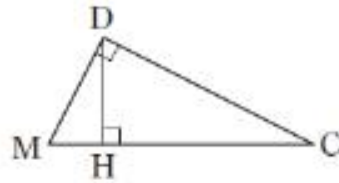
[정답] ⑤



그림과 같이 점 A가 원점, 점 B의 좌표가 B(10, 0, 0), 점 M의 좌표가

M(0, 5, 0)이 되도록 좌표공간을 설정하자.

점 D에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 CM 위에 있다.



이때 $\triangle DMH \sim \triangle CDH \sim \triangle CMD$ 이고

$$\overline{DM} = 5, \overline{CD} = 10 \text{ 에서}$$

$$\overline{CD} = 2\overline{DM} \text{ 이므로}$$

$$\overline{CH} = 2\overline{DH} = 2 \times 2\overline{MH} = 4\overline{MH}$$

따라서 점 H는 선분 MC를 1:4로 내분하는 점이다.

두 점 M, C의 좌표가 각각

M(0, 5, 0), C(10, 10, 0)이므로 점 H의 좌표는

$$H\left(\frac{1 \times 10 + 4 \times 0}{1+4}, \frac{1 \times 10 + 4 \times 5}{1+4}, \frac{1 \times 0 + 4 \times 0}{1+4}\right)$$

즉, H(2, 6, 0)

한편, 삼각형 DMC에서

$$\overline{CM} = \sqrt{25 + 100} = 5\sqrt{5}$$

$$\text{이고 } \overline{DH} \times \overline{CM} = \overline{DM} \times \overline{CD} \text{ 이므로}$$

$$\overline{DH} \times 5\sqrt{5} = 5 \times 10$$

$$\overline{DH} = 2\sqrt{5}$$

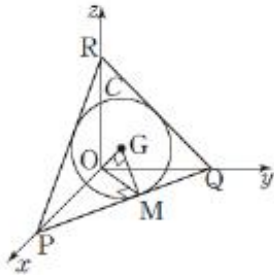
따라서 점 D의 좌표는 D(2, 6, $2\sqrt{5}$)이므로

$$\overline{BD} = \sqrt{(2-10)^2 + (6-0)^2 + (2\sqrt{5}-0)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{64 + 36 + 20} \\
 &= 2\sqrt{30}
 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③



그림과 같이 원점 O에서 평면 PQR에 내린 수선의 발을 G, 직선 PQ에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{GM} \perp \overline{PQ}$ 이다. 이때 점 M은 선분 PQ의 중점이므로 점 G는 삼각형 PQR의 중심 위에 있다. 마찬가지로 점 G는 삼각형 PQR의 다른 중선 위에도 있으므로 삼각형 PQR의 무게중심이고, 이때 삼각형 PQR는 정삼각형이므로 점 G는 내접원 C의 중심이다.

점 G의 좌표는

$$G\left(\frac{3+0+0}{3}, \frac{0+3+0}{3}, \frac{0+0+3}{3}\right)$$

즉, $G(1, 1, 1)$

$$\text{이므로 } \overline{OG} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

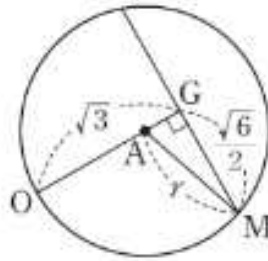
$$\text{점 M의 좌표는 } M\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$

$$\text{즉, } M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$$

$$\text{이므로 } \overline{GM} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

한편, 직선 OG가 원 C를 포함하는 평면에 수직이므로 구 S의 중심을 A라 하면 직선 OG는 점 A를 지난다.

따라서 구 S를 세 점 O, G, M을 포함하는 평면으로 자른 단면은 그림과 같다.



구 S의 반지름의 길이를 r 라 하면 직각 삼각형 AMG에서

$$\overline{AM} = r, \overline{GM} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \overline{AG} = \sqrt{3} - r,$$

$\angle AGM = 90^\circ$ 이므로

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3} - r)^2$$

$$2\sqrt{3}r = \frac{9}{2}, r = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

따라서 구 S의 겉넓이는

$$4\pi \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{27\pi}{4}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ①

두 점 $A(1, a, -6)$, $B(-3, 2, b)$ 에 대하여 선분 AB를 3:2로 외분하는 점을 P라 하면 점 P가 x 축 위에 있으므로 점 P의 y 좌표와 z 좌표가 모두 0이다.

따라서

$$\frac{3 \times 2 - 2 \times a}{3 - 2} = 6 - 2a = 0$$

에서 $a = 3$ 이고

$$\frac{3 \times b - 2 \times (-6)}{3 - 2} = 3b + 12 = 0$$

에서 $b = -4$ 이므로 $a + b = -1$ 이다.

EBS교재

[정답] ⑤

두 점 $A(4, 2, -3)$, $B(a, b, c)$ 에 대하여 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점을 P라고 하면 점 P가 x 축 위에 있으므로 점 P의 y 좌표와 z 좌표가 모두 0이다.

따라서

$$\frac{2 \times b + 3 \times 2}{2+3} = 0$$

에서 $b = -3$

$$\frac{2 \times c + 3 \times (-3)}{2+3} = 0$$

에서 $c = \frac{9}{2}$

또 선분 AB를 3:2로 외분하는 점을 Q라고 하면 점 Q가 yz 평면 위에 있으므로 점 Q의 x 좌표가 0이다.

따라서

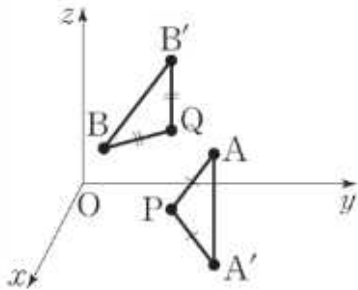
$$\frac{3 \times a - 2 \times 4}{3-2} = 0$$

에서 $a = \frac{8}{3}$

따라서 $a+b+c = \frac{8}{3} + (-3) + \frac{9}{2} = \frac{25}{6}$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤



점 A를 xy 평면에 대칭시킨 점 $A'(1, 5, -2)$ 에 대하여 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이다.

또, 점 B를 yz 평면에 대칭시킨 점 $B'(-2, 2, 4)$ 에 대하여 $\overline{QB} = \overline{QB'}$ 이다.

이때, $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$

$$= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$$

$$\geq \overline{A'B'} = \sqrt{9+9+36} = 3\sqrt{6}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은

A', P, Q, B' 이 일직선 위에 있을 때 $3\sqrt{6}$ 이 된다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

선분 AB를 1:2로 내분하는 점이 $(1, 0, -2)$ 이므로

$$\frac{1 \cdot a + 2 \cdot 2}{1+2} = 1 \text{에서 } a = -1$$

$$\frac{1 \cdot 2b + 2 \cdot (-6)}{1+2} = 0 \text{에서 } b = 6$$

$$\frac{1 \cdot (-4) + 2 \cdot c}{1+2} = -2 \text{에서 } c = -1$$

$$\therefore a+b+c = 4$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

두 구 S_1, S_2 의 중심을 각각 C_1, C_2 라 하면

$\overline{C_1C_2} = 3+5=8$ 이고 $\overline{C_1C_2}$ 를 3:5로 내분한 점이 P이므로

$$\left(\frac{3a+5}{8}, \frac{3b+10}{8}, \frac{3c+10}{8} \right) = (-1, 3, 0)$$

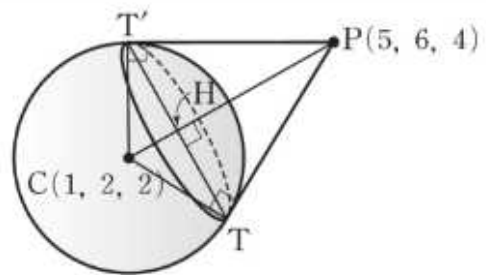
에서

$$a = -\frac{13}{3}, b = \frac{14}{3}, c = -\frac{10}{3}$$

따라서 $a+b+c = -3$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 27



선분 PT는 구에 접하는 접선이므로 $\angle CTP = 90^\circ$ 이고, 접점 T가 나타내는 도형은 원이다.

그림에서 선분 TT' 은 이 원의 지름이고 선분 CP와 선분 TT' 이 만나는 점을 H라 하면 점 H는 이 원의 중심이다.

$\overline{CP} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$, $\overline{CT} = 3$ 이므로 그림의 직각삼각형 CTP에서

$$\overline{PT} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \angle PCT = \frac{\pi}{3}, \angle CPT = \frac{\pi}{6}$$

직각삼각형 CHT에서

$$\angle HCT = \frac{\pi}{3}, \overline{CT} = 3 \text{ 이므로}$$

$$\overline{CH} = \frac{3}{2}, \overline{TH} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 지름이 선분 TT'인 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\pi$$

따라서 $k = 3\sqrt{3}$ 이므로 $k^2 = 27$ 이다.

17. 공간벡터

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FN} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) - \frac{1}{2}\vec{c} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

따라서 $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$ 이므로

$$x + y + z = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FN} \\ &= \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

따라서 $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$ 이므로

$$x + y + z = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

점 P의 좌표를 $(a, 0, 0)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} \\ &= (2, 3, 4) - (a, 0, 0) \\ &= (2-a, 3, 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} \\ &= (4, 0, -5) - (a, 0, 0) \\ &= (4-a, 0, -5)\end{aligned}$$

이므로

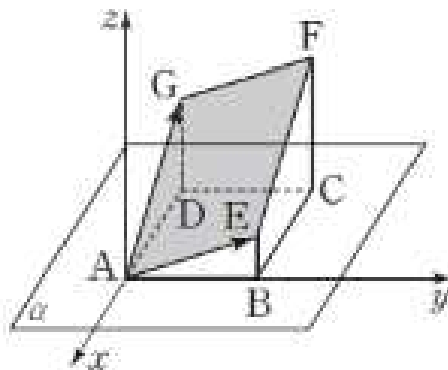
$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (2-a, 3, 4) \cdot (4-a, 0, -5)$$

$$\begin{aligned}&= (2-a)(4-a) + 3 \times 0 + 4 \times (-5) \\ &= a^2 - 6a - 12 \\ &= (a-3)^2 - 21\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 는 $a = 3$ 일 때, 최솟값 -21 을 갖는다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③



그림과 같이 점 A를 원점으로 하고 두 점 B, D의 좌표가 각각

$B(0, 3, 0), D(-3, 0, 0)$ 이 되도록 좌표공간을 설정하면 두 점 E, G의 좌표는

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} \\ &= \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) - (3, 0, 0) \\ &= \left(-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

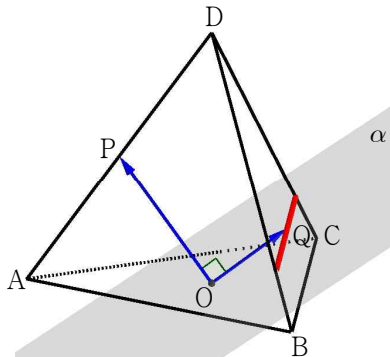
따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{CM} &= \frac{3}{\sqrt{5}}(0, 1, 2) \cdot \left(-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}}\left\{0 \times (-3) + 1 \times \frac{3}{2} + 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{9\sqrt{5}}{10}\end{aligned}$$

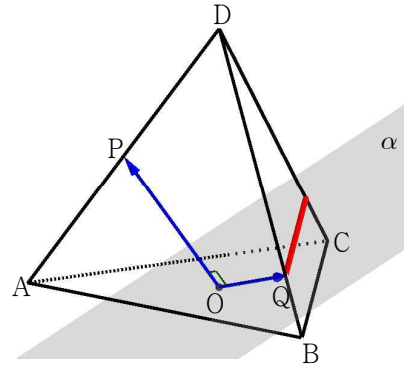


EBS연계 기출분석 1

[정답] 19



그림과 같이 점 O를 지나고 $\overrightarrow{OP}$ 를 법선 벡터로 하는 평면 α 와 면 BCD의 교선 위에 점 Q가 있다. 따라서 $|\overrightarrow{PQ}|$ 의 값이 최대가 되기 위한 점 Q의 위치는 선분 DB 또는 선분 DC 위에 있어야 한다. 그림과 같이 점 Q가 선분 DB 위에 있다고 가정하고 좌표를 이용해서 문제를 해결하자.



$A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$, $D(0, 0, 0)$ 이라 두면 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 길이를 $2\sqrt{2}$ 배 한다. 한편,

$$O\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

이다. $0 \leq t \leq 1$ 인 실수 t 에 대하여 $Q(t, 0, t)$ 라 하자.

$$\overrightarrow{OP} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \left(t - \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, t - \frac{2}{3}\right)$$

이고

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$$

$$\begin{aligned}&= \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \left(t - \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, t - \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{6}\right)\left(t - \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(t - \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

$= 0$

이므로 $t = \frac{4}{5}$ 이다. 그러므로

$Q\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{25}{100} + \frac{64}{100}} = \frac{7}{10}\sqrt{2}\end{aligned}$$

이다. 문제에서 요구하는 한 모서리의 길이가 4인 정사면체에서 답을 구하면

$$\frac{7}{10}\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{14}{5}$$

이다. 즉, $p+q=19$ 이다.



[정답] 25

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3}$$

점 N이 선분 EM을

 $t : (1-t)$ ($0 < t < 1$)로 내분한다고 하면

$$\overrightarrow{AN} = (1-t)\overrightarrow{AE} + t\overrightarrow{AM}$$

$$= (1-t) \times \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + t \times \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2}$$

$$= \frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{AB} + \frac{t}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{t}{2}\overrightarrow{AD}$$

또한

$$\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AG}$$

$$= \frac{k}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{3}\overrightarrow{AD} \quad (0 < k < 1)$$

풀이므로

$$\frac{2}{3}(1-t) = \frac{t}{2}, \quad 1-t = \frac{3}{4}t, \quad t = \frac{4}{7}$$

이때

$$\overrightarrow{EN} = \frac{4}{7}\overrightarrow{EM}$$

$$= \frac{4}{7}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AE})$$

$$= \frac{4}{7}\left(\frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= -\frac{8}{21}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{이므로 } l+m+n = -\frac{8}{21} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$$

따라서 $p=21$, $q=4$ 이므로

$$p+q=25$$



[정답] ②

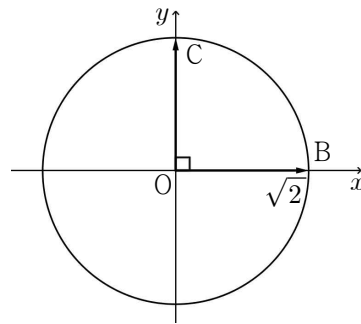
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c} = 2$$

이므로

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{2}$$

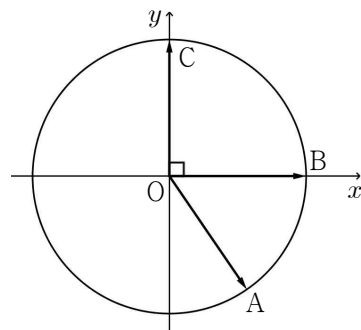
이다. 그러므로 세 점 A, B, C는 원점이 중심이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원 위의 점이다.

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ 이므로 두 점 B, C는 그림과 같이 두자.



또한

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -\sqrt{2}$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크기는 예각이고 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ 가 이루는 각의 크기는 둔각이다. 따라서 점 A는 그림과 같이 제 4사분면에 있다.



따라서 $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$ 이다.

[다른 풀이]

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

이때,

$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= 2 - 2 \times 1 + 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \overline{AB}^2 = 2 \dots \textcircled{1}$$

이다.

$$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}| = |\vec{c} - \vec{b}|$$

이때,

$$\begin{aligned} |\vec{c} - \vec{b}|^2 &= (\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2 - 2 \times 0 + 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \overline{BC}^2 = 4 \dots \textcircled{2}$$

이다.

$$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = |\vec{c} - \vec{a}|$$

이때,

$$\begin{aligned} |\vec{c} - \vec{a}|^2 &= (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 \\ &= 2 - 2 \times (-\sqrt{2}) + 2 \\ &= 4 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \overline{AC}^2 = 4 + 2\sqrt{2} \dots \textcircled{3}$$

이다. ①, ②, ③에서

$$\overline{AB}^2 < \overline{BC}^2 < \overline{AC}^2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$$

이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

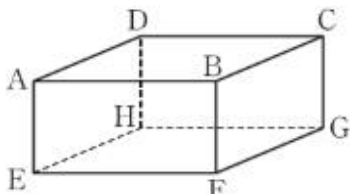
[정답] ④

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

$$2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BF} \text{ 에서 } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} \text{ 이고}$$

$$\overline{AE} \parallel \overline{BF} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$



그림에서 선분 CG의 중점을 M이라 하면

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP}|$$

$$= \left| \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \right|$$

$$= |\overrightarrow{AM}|$$

직사각형 APMC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \overline{AP} = 1 \text{ 이므로}$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \overline{AM} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

오른쪽 그림과 같이 점 H를 원점, 세 반직선 HE, HG, HD를 각각 x, y, z축의

양의 방향으로 하는 좌표공간에 직육면체

ABCD-EFGH를 놓으면

$$\overrightarrow{HE} = (6, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{HG} = (0, 8, 0)$$

$$\overrightarrow{HD} = (0, 0, 10) \text{ 이고}$$

$$M(3, 8, 5), N(6, 4, 0) \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HM} = (3, -4, -5)$$

$$\overrightarrow{MN} = l(6, 0, 0) + m(0, 8, 0) + n(0, 0, 10)$$

$$= (6l, 8m, 10n) \text{ 에서}$$

$$6l = 3, 8m = -4, 10n = -5$$

$$\therefore l = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore l + m + n = -\frac{1}{2}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 12

좌표공간에서

$$B(0, 0, 0), D(0, 6, 0), C(3\sqrt{3}, 3, 0) \text{ 이}$$

라 하면

$$A(\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6}), E(\sqrt{3}, 3, -2\sqrt{6})$$

이다.

$$\overrightarrow{BA} = (\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6}),$$

$$\overrightarrow{DE} = (\sqrt{3}, -3, -2\sqrt{6})$$

$$\therefore |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE}|^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ③

오른쪽 그림과 같이

꼭짓점 H를 원점, 세

반직선 HE, HG, HD

를 각각 x축, y축, z축

의 양의 방향으로 하는

좌표공간에 직육면체

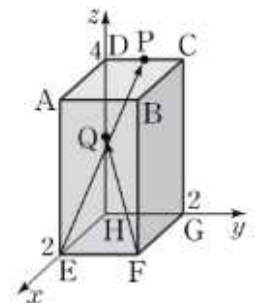
ABCD-EFGH를 올

려놓으면 네 점

$$E, P, F, Q \text{ 의 좌표는 } E(2, 0, 0),$$

$$P(0, 1, 4), F(2, 2, 0), Q(0, 0, 2) \text{ 이다.}$$

$$\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{HP} - \overrightarrow{HE} = (-2, 1, 4)$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{FQ} &= \overrightarrow{HQ} - \overrightarrow{HF} = (-2, -2, 2) \\ \therefore \overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{FQ} &= (-2, 1, 4) \cdot (-2, -2, 2) \\ &= 4 - 2 + 8 = 10\end{aligned}$$

18. 도형의 방정식

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

주어진 구의 중심을 C 라 하면 $C(2, 0, 3)$

평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 구와 평면 α 가 점 A에서 접하므로 원점 O에 대하여

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \\ &= (4, -2, 2) - (2, 0, 3) = (2, -2, -1)\end{aligned}$$

xy 평면의 법선벡터는 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ 이므로 평면 α 와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ_1 이라 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= \frac{|2 \times 0 + (-2) \times 0 + (-1) \times 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

이므로

$$S_1 = 30 \cos \theta_1 = 30 \times \frac{1}{3} = 10$$

yz 평면의 법선벡터는 $\vec{n}_2 = (1, 0, 0)$ 이므로 평면 α 와 yz 평면이 이루는 예각의 크기를 θ_2 라 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta_2 &= \frac{|2 \times 1 + (-2) \times 0 + (-1) \times 0|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

이므로

$$S_2 = 30 \cos \theta_2 = 30 \times \frac{2}{3} = 20$$

따라서 $S_1 + S_2 = 10 + 20 = 30$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 15

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (0, 1, 0) - (-1, 0, 0) \\ &= (1, 1, 0)\end{aligned}$$

에서 직선 l 은 점 $A(-1, 0, 0)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$x + 1 = y, z = 0$$

두 점 P, R는 각각 직선 l , z 축 위에 있으므로 두 점의 좌표를 각각

$P(p, p+1, 0), R(0, 0, r)$ 라 하면

$$\overrightarrow{PR} = (-p, -p-1, r)$$

z 축의 방향벡터는 $\vec{u}_2 = (0, 0, 1)$ 이고

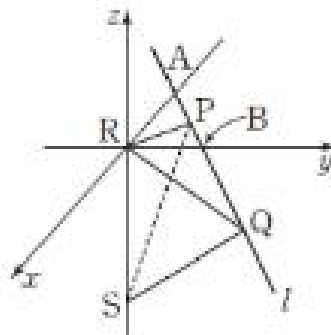
$$\overrightarrow{PR} \perp \vec{u}_1, \overrightarrow{PR} \perp \vec{u}_2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} \cdot \vec{u}_1 &= (-p, -p-1, r) \cdot (1, 1, 0) \\ &= -2p - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\text{즉, } p = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} \cdot \vec{u}_2 &= (-p, -p-1, r) \cdot (0, 0, 1) \\ &= r = 0\end{aligned}$$

따라서 $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), R(0, 0, 0)$ 이다.



또 두 점 Q, S는 각각 직선 l , z 축 위에 있으므로 두 점의 좌표를 각각

$Q(q, q+1, 0), S(0, 0, s)$ 하면

$$\overrightarrow{QS} = (-q, -q-1, s)$$

$$\overrightarrow{QS} // \vec{v} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{QS} = k\vec{v} (k \neq 0) \text{에서}$$

$$(-q, -q-1, s) = k(1, 2, 3)$$

$$(-q, -q-1, s) = (k, 2k, 3k)$$

$$-q = k, -q-1 = 2k, s = 3k \text{ 이므로}$$

$$k = -1, q = 1, s = -3$$

따라서 $Q(1, 2, 0), S(0, 0, -3)$ 이다.

사면체 PQRS에서 세 점 P, Q, R는 모두 xy 평면 위에 있고 점 S는 z 축 위에 있으므로

$\overline{RS} \perp$ (평면 PQR)

이다. xy 평면의 점 $R(0, 0, 0)$ 에서 직선 PQ, 즉 직선 $x - y + 1 = 0, z = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이고

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이므로 삼각형 PQR의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

또한 $\overline{RS} = h$ 라 하면 $h = 3$ 이므로 사면체 PQRS의 부피 V 는

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } 20V = 20 \times \frac{3}{4} = 15$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 55

$$\frac{x-1}{2} = 1-y = z+2 = t \quad (t \text{는 실수}) \text{라 하면}$$

면 점 P의 좌표는

$P(2t+1, -t+1, t-2)$ 로 놓을 수 있다.

두 점 $A(2, 0, 0), B(0, 3, 0)$ 에 대하여

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$$

$$= (2t-1)^2 + (-t+1)^2 + (t-2)^2 + (2t+1)^2 + (-t-2)^2 + (t-2)^2$$

$$= 12t^2 - 6t + 15$$

$$= 12\left(t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{16}\right) + 15 - \frac{3}{4}$$

$$= 12\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{57}{4}$$

이므로 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 값은 $t = \frac{1}{4}$ 즉 점

P의 좌표가 $P\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{7}{4}\right)$ 일 때 최소이다.

이때

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{9}{16} + \frac{49}{16} = \frac{47}{8} \end{aligned}$$

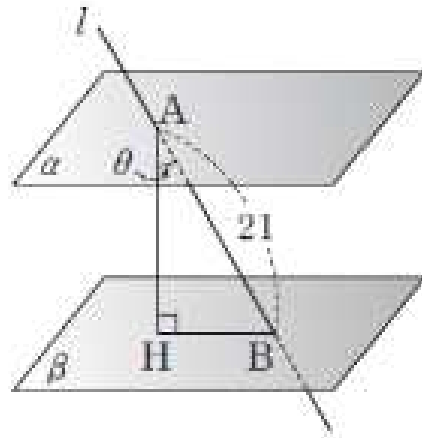
따라서 $p = 8, q = 47$ 이므로

$$p + q = 8 + 47 = 55$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 96

그림과 같이 점 A에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle BAH = \theta$ 라 하자.



직선 AB의 방향벡터가 $\vec{u} = (1, 2, -2)$ 이고 평면 α 의 법선벡터, 즉 직선 AH의 방향벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\vec{n} = (3, -2, 6)$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} \\ &= \frac{|1 \times 3 + 2 \times (-2) + (-2) \times 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} \\ &= \frac{13}{21} \end{aligned}$$

이때 직각삼각형 AHB에서 $\cos\theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \overline{AB} \cos\theta \\ &= 21 \times \frac{13}{21} = 13 \end{aligned}$$

즉, 평면 α 위의 임의의 점과 평면 β 사

이의 거리가 13이므로 평면 α 위의 점 $(-1, 1, 0)$ 과 평면 β 사이의 거리도 13이다.

따라서

$$\frac{|3 \times (-1) - 2 \times 1 + 6 \times 0 + k|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = 13$$

$$\frac{|k-5|}{7} = 13$$

$$|k-5| = 91$$

이때 $k > 0$ 이므로 $k = 96$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ④

평면 $2x + 2y - z + 5 = 0$ 의 법선벡터를 $\vec{n}_1$, xy 평면의 법선벡터를 $\vec{n}_2$ 라고 하면

$$\vec{n}_1 = (2, 2, -1), \vec{n}_2 = (0, 0, 1)$$

이다. 또한 두 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 두면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 0 + 2 \times 0 + (-1) \times 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

이다.

EBS교재

[정답] 16

두 평면 $2x - \sqrt{2}y - 2z = 1$, $x - 3z = 0$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ 라고 하면

$$\vec{n}_1 = (2, -\sqrt{2}, -2),$$

$$\vec{n}_2 = (1, 0, -3)$$

이 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 1 + (-\sqrt{2}) \times 0 + (-2) \times (-3)|}{\sqrt{2^2 + (-\sqrt{2})^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

따라서 도형 F 의 넓이를 S , 도형 F' 의 넓이를 S' 이라고 하면

$$S' = S \cos \theta$$

$$= 20 \times \frac{4}{5} = 16$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] 16

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 3 = 0$$

$$x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$$

이므로 이 구의 중심의 좌표가

$(0, -1, 0)$ 이고, 반지름의 길이가 2이다.

평면 $x + 8y - 4z + k = 0$ 이

구 $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$ 에 접하므로 구의 중심에서 평면까지의 거리가 구의 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-8+k|}{\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}} = \frac{|-8+k|}{9} = 2$$

$$|-8+k| = 18$$

$$-8+k = -18 \text{ 또는 } -8+k = 18$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-10 + 26 = 16$$

이다.

EBS교재

[정답] 7

이 구의 중심의 좌표가 $(2, -3, 0)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이다.

평면 $x + y - 4z + k = 0$ 이

구 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2$ 에 접하므로 구의 중심에서 평면까지의 거리가 구의 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-1+k|}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}} = \sqrt{2}$$

$$|-1+k| = 6$$

$k > 0$ 이므로 $k = 7$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 5

직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, 2, 3)$$

원 C 의 중심을 C 라 하면 $C(4, 3, 0)$ 이고, 조건 (가)에서 직선 AB 는 점 C 를 지난다.

직선 AB 는 xy 평면 위에 있으므로 직선 AB 의 방향벡터를 $\vec{v} = (p, q, 0)$ (p, q 는 실수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 두 벡터 $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (p, q, 0)$ 은 서로 수직이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = p + 2q = 0$$

따라서 $p = -2q$ 이므로

$$\vec{v} = (-2q, q, 0) \quad (\text{단, } q \neq 0)$$

따라서 직선 AB 는 점 $C(4, 3, 0)$ 을 지나고 방향벡터가 $(-2, 1, 0)$ 이므로 직선 AB 의 방정식은

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-3}{1}, z=0$$

이 직선이 y 축과 만날 때의 x 좌표는 0이므로

$$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-3}{1} \text{에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$\frac{0-4}{-2} = \frac{y-3}{1}$$

$$\therefore y=5$$

따라서 직선 AB 가 y 축과 만나는 점의 y 좌표는 5이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 104

구 S 의 중심은 $C(1, 2, 2)$ 이므로 직선 OC 의 방향벡터를 $\vec{a}$ 라 하면

$$\vec{a} = (1, 2, 2)$$

평면 $x-y+z+10=0$ 의 법선벡터를 $\vec{b}$ 라 하면

$$\vec{b} = (1, -1, 1)$$

따라서 직선 OC 와 평면

$x-y+z+10=0$ 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{|1-2+2|}{\sqrt{9}\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{27}}$$

직선 AB 는 구 S 의 중심 C 를 지나므로 선분 AB 의 길이는 구 S 의 지름의 길이와 같다.

$$\therefore \overline{AB} = 2\sqrt{27}$$

따라서 선분 AB 의 평면

$x-y+z+10=0$ 위로의 정사영의 길이는

$$l = \overline{AB} \times \cos\theta = 2\sqrt{27} \times \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{27}} = 2\sqrt{26}$$

$$\therefore l^2 = 4 \times 26 = 104$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

직선 l 와 평면 α 가 서로 수직이므로 직선 l 의 방향벡터 $\vec{u} = (2, 3, 6)$ 과 평면 α 의 법선벡터 $\vec{n} = (1, a, b)$ 는 서로 평행하다.

$$\therefore \vec{u} = t\vec{n} \quad (\text{단, } t \neq 0 \text{인 실수})$$

즉 $(2, 3, 6) = (t, at, bt)$ 에서

$$2=t, 3=at, 6=bt$$

$$\therefore t=2, a=\frac{3}{2}, b=3$$

따라서 평면 α 의 방정식은

$$x + \frac{3}{2}y + 3z + c = 0,$$

즉 $2x + 3y + 6z + 2c = 0$ 이고

점 $(3, 1, -2)$ 와 평면 α 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|2 \times 3 + 3 \times 1 + 6 \times (-2) + 2c|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}}$$

$$= \frac{|-3 + 2c|}{7} = 2$$

$$\therefore c = \frac{17}{2} (\because c > 0)$$

$$\therefore a+b+c = \frac{3}{2} + 3 + \frac{17}{2} = 13$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ④

원점 O는 평면 $x+2y+2z=0$ 위의 점
이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{AH}$ 는 서로 수직이다. 점 A(2, -1, 4)와 평면

$$x+2y+2z=0 \text{ 사이의 거리 } \overline{AH} \text{ 는}$$

$$\overline{AH} = \frac{|1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2$$

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$

이므로 직각삼각형 OHA에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{24 - 4} = 2\sqrt{5}$$

$\angle AOH = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} \text{ 이}$$

므로

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

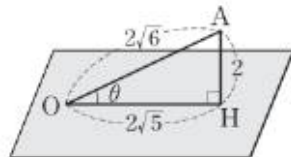
$$= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OH}| \cos \theta = |\overrightarrow{OH}|^2 = 20$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH})$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

$$= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OH}|^2$$

$$= 24 + 20 = 44$$



VIII. 순열과 조합

19. 순열

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

$n+f(n)$ 이 홀수이려면 n 과 $f(n)$ 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이어야 한다.

따라서 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4, 5 각각에 대응될 수 있는 경우의 수가 각각 2, 3, 2, 3, 2 이므로 구하는 경우의 수는 곱

의 법칙에 의하여 $2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 72$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

A, B, C가 아닌 세 명을 X_1, X_2, X_3 이라 하고, 다음 두 가지 경우로 나누어 생각하자.

(i) A가 맨 앞이나 맨 뒤에 서는 경우

A	X_i				
---	-------	--	--	--	--

				X_i	A
--	--	--	--	-------	---

(단, $i = 1, 2, 3$)

A가 서는 경우의 수는 2

A와 이웃하는 자리에 X_1, X_2, X_3 중 1명이 서는 경우의 수는 3이고

나머지 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 4!

이므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$2 \times 3 \times 4! = 144$$

(ii) A가 맨 앞이나 맨 뒤에 서지 않는 경우

X_i	A	X_j			
-------	---	-------	--	--	--

	X_i	A	X_j		
--	-------	---	-------	--	--

⋮

(단, $i \neq j$ 이고
 $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$)

A가 서는 경우의 수는 4

A의 앞과 뒤에 X_1, X_2, X_3 중 2명이 서는 경우의 수는 ${}_3P_2$ 이고

나머지 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 3!

이므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$4 \times {}_3P_2 \times 3! = 144$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$$144 + 144 = 288$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 972

$x < 4$, 즉 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 일 때, 조건 (나)에서 $f(x)$ 의 값이 될 수 있는 것은 중복을 허락하여 4, 5, 6 중의 하나이다.

또 $x > 4$, 즉 $x=5$ 또는 $x=6$ 일 때, $f(x)$ 의 값이 될 수 있는 것은 중복을 허락하여 1, 2, 3, 4, 5, 6 중의 하나이다.

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$${}_3\Pi_3 \times {}_6\Pi_2 = 3^3 \times 6^2 \\ = 972$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 144

서로 다른 책 3권을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

$${}_3P_3 = 3! = 6 \quad \dots\dots ㉠$$

검은색 볼펜, 파란색 볼펜, 빨간색 볼펜을 각각 A, B, C라 하면

(i) 두 종류의 볼펜을 택하는 경우

AAB, AAC, BBA, BBC, CCA, CCB의

6가지 경우가 있고, 이 각각에 대하여 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3 \text{이므로}$$

$$6 \times 3 = 18$$

(ii) 세 종류의 볼펜을 택하는 경우

ABC의 1가지이므로 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$3! = 6$$

(i), (ii)에서 볼펜을 나누어 주는 경우의 수는

$$18 + 6 = 24 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ③

일의 자리의 수는 5이므로 나머지 세 자리에 들어갈 수 있는 수의 개수는 중복을 허락하므로 모두 5개씩이다.

따라서 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$ 이다.

EBS교재

[정답] ⑤

백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 홀수이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) 백의 자리의 수가 홀수, 일의 자리의 수가 짝수인 경우

백의 자리의 수가 홀수이므로 1, 3, 5 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 일의 자리의 수가 짝수이므로 2, 4 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 천의 자리와 십의 자리의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수이므로

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$3 \times 2 \times 25 = 150$$

(ii) 백의 자리의 수가 짝수, 일의 자리의 수가 홀수인 경우

백의 자리의 수가 짝수이므로 2, 4 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 일의 자리의 수가 홀수이므로 1, 3, 5 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 천의 자리와 십의 자리의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중 하나가 와야 하므로 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수이므로

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$2 \times 3 \times 25 = 150$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$$150 + 150 = 300$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 3(가지)이고, 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 경우의 수는

${}_4\Pi_4 = 4^4$ (가지) 이므로 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수의 개수는

$$3 \times 4^4 = 3 \times 2^8 \text{ (개)}$$

이때, 만의 자리와 일의 자리에 모두 홀수가 오는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_2 \times {}_4\Pi_3 = 2^2 \times 4^3 = 2^8 \text{ (개)}$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$3 \times 2^8 - 2^8 = 2 \times 2^8 = 2^9 \text{ (개)}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

같은 문자끼리는 이웃하지 않도록 6 개의 문자를 일렬로 배열하는 방법의 수는

(i)

c		c		c	
---	--	---	--	---	--

 형태

빈 자리에 a, b, b 를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(ii)

	c		c		c
--	---	--	---	--	---

 형태

빈 자리에 a, b, b 를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(iii)

c			c	b	c
---	--	--	---	---	---

 형태

빈 자리에 a, b 를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$$2! = 2$$

(iv)

c	b	c			c
---	---	---	--	--	---

 형태

빈 자리에 a, b 를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 + 3 + 2 + 2 = 10$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

여학생 3명을 먼저 일렬로 배열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

$${}_3P_3 = 3! = 6$$

여

여

여

이 각각에 대하여 남학생 3명 중 1명을 맨 앞에 배열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 순열의 수이므로

$${}_3P_1 = 3$$

남

여

여

여

이 각각에 대하여 나머지 남학생 2명을 다음 그림과 같이 $\vee$ 로 표시된 곳에 배열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

$${}_3P_2 = 6$$

남

여

여

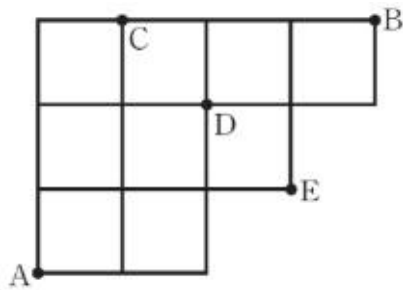
여

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$6 \times 3 \times 6 = 108$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 28



그림에서 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $A \rightarrow C \rightarrow B$ 인 경우

$$\frac{4!}{3!} \times 1 = 4$$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow B$ 인 경우

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{3!}{2!} = 6 \times 3 = 18$$

(iii) $A \rightarrow E \rightarrow B$ 인 경우

$$\left(\frac{4!}{3!} - 1 \right) \times \left(\frac{3!}{2!} - 1 \right) = 3 \times 2 = 6$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $4 + 18 + 6 = 28$

20. 조합

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

적어도 2명의 남자가 국화차를 마시는 경우는 다음과 같이 생각할 수 있다.

(i) 2명의 남자와 3명의 여자가 국화차를 마시는 경우

남자 3명 중 국화차를 마실 2명을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

여자 5명 중 국화차를 마실 3명을 택하는

경우의 수는 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

따라서 이 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
 $3 \times 10 = 30$

(ii) 3명의 남자와 2명의 여자가 국화차를 마시는 경우

남자 3명 중 국화차를 마실 3명을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3 = 1$

여자 5명 중 국화차를 마실 2명을 택하는

경우의 수는 ${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

따라서 이 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
 $1 \times 10 = 10$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $30 + 10 = 40$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

x, y, z 중 적어도 하나는 0이 아니므로
 $x + y + z + 3w = 6$ 에서 $w < 2$ 이다.

(i) $w = 0$ 일 때

방정식 $x + y + z = 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_3H_6 &= {}_{3+6-1}C_6 \\ &= {}_8C_6 = {}_8C_2 \\ &= \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28 \end{aligned}$$

(i) $w = 1$ 일 때

방정식 $x + y + z = 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_3H_3 &= {}_{3+3-1}C_3 \\ &= {}_5C_3 = {}_5C_2 \\ &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $28 + 10 = 38$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

조건 (나)에서 $f(3) = 5$ 이므로 조건 (가)를 만족시키도록 $f(1), f(2)$ 를 택하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 택하는 조합의 수이고, $f(4), f(5)$ 를 택하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 6, 7, 8

중에서 2개를 택하는 조합의 수이다.
따라서 구하는 함수 f 의 개수는
 ${}_4C_2 \times {}_3C_2 = 6 \times 3 = 18$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 120

$x = |a| - 1$, $y = |b| - 2$, $z = |c| - 3$ 이라 하면
조건 (가)에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이고,
조건 (나)에서
 $(x+1) + (y+2) + (z+3) = 10$ 이므로
 $x + y + z = 4$ ㉠
방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수
 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 서로
다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수
와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

이때 방정식 $|a| + |b| + |c| = 10$ 은
 $a = \pm(x+1)$, $b = \pm(y+2)$, $c = \pm(z+3)$ 을
해로 갖는다.
따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는
 $15 \times 2^3 = 15 \times 8 = 120$

EBS연계 기출분석 1

[정답] 10

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

EBS교재

[정답] ①

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] 32

(가)조건을 만족시키는 음이 아닌 정수
 a, b, c 의 모든 순서쌍의 개수는
 ${}_3H_7 = {}_9C_7 = 36$ 이다.
(나)에서 $2^a \times 4^b = 2^{a+2b}$ 이 $8(=2^3)$ 의 배
수이므로 $a+2b \geq 3$ 이다. 따라서
 $a+2b < 3$ 인 음이 아닌 정수 a, b 의 순

서쌍은 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ 으로 모
두 4개이다. (c 는 a, b 가 정해지면 따라
정해진다). 그러므로 조건 (가), (나)를 모
두 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의
모든 순서쌍의 개수는 $36 - 4 = 32$ 이다.

EBS교재

[정답] ②

w 의 값에 따라 각 경우로 나누면 다음과
같다.

(i) $w = 0$ 일 때,

주어진 방정식은 $x + y + z = 7$ 이고 구
하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개
에서 7개를 택하는 중복조합의 수이므
로 ${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2$

$$= \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

(ii) $w = 1$ 일 때,

주어진 방정식은 $x + y + z = 2$ 이고 구
하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개
에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므

$$\text{로 } {}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 합
의 법칙에 의해 $36 + 6 = 42$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

서로 다른 5개의 페인트를 3개의 자동차에
하나씩 칠하는 경우의 수는 서로 다른 5개
에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

이때 서로 다른 페인트를 칠한 3개의 자동
차는 서로 다른 것이므로 서로 다른 모양의
스티커 4장을 서로 다른 페인트가 칠해진
3개의 자동차에 각각 하나씩 부착시키는
경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택
하여 일렬로 나열하는 순열의 수

$${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{이고,}$$

마찬가지로 생각하면 서로 다른 3개의 자

동차 번호판을 각각 하나씩 부착시키는 경우의 수는 ${}_3P_3$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $10 \times 24 \times 6 = 1440$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

조건 (가)에 의하여

$$m = 2m' + 2, n = 2n' + 2, a = 2a' + 2, \\ b = 2b' + 2 \quad (m', n', a', b' \geq 0) \text{ 라 하자.}$$

조건 (나)에 의하여

$$(2m' + 2) + (2n' + 2) + (2a' + 2) + (2b' + 2) = 24$$

$$2m' + 2n' + 2a' + 2b' = 16$$

$$m' + n' + a' + b' = 8 \quad (m', n', a', b' \geq 0)$$

이다.

$m' + n' + a' + b' = 8 \quad (m', n', a', b' \geq 0)$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해는

$${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

이때 두 직선이 서로 다르므로

$m \neq a$ 또는 $n \neq b$ 가 되어야 한다.

$m = a$ 인 동시에 $n = b$ 인 경우의 수는

$m' = a'$ 인 동시에 $n' = b'$ 인

경우의 수와 같으므로

$$m' + n' + a' + b' = 8$$

$$2m' + 2n' = 8$$

$m' + n' = 4$ 을 만족하는 정수해는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

따라서 만족하는 경우의 수는 $165 - 5 = 160$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 166

(i) 초코식빵을 2개 구입하는 경우

우유식빵, 밤식빵, 옥수수식빵 중에서 중복을 허락하여 8개를 구입하면 되므로 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\text{즉, } {}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2$$

$$= \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

(ii) 초코식빵을 1개 구입하는 경우

우유식빵, 밤식빵, 옥수수식빵 중에서 중복을 허락하여 9개를 구입하면 되므로 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\text{즉, } {}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2$$

$$= \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55$$

(iii) 초코식빵을 구입하지 않는 경우

우유식빵, 밤식빵, 옥수수식빵 중에서 중복을 허락하여 10개를 구입하면 되므로 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\text{즉, } {}_3H_{10} = {}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2$$

$$= \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $45 + 55 + 66 = 166$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 252

(가) 조건에 의하여 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=6$ 이다.

(i) $f(3)=3$ 일 때, $f(1)$ 과 $f(2)$ 는 (나) 조건에 의하여 1, 2, 3 중에서 중복하여 2개를 고르면 된다.

$$\text{즉, } {}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

$f(4)$ 와 $f(5)$ 는 (나) 조건에 의하여

3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 중복하여 2개를 고르면 된다.

$$\text{즉, } {}_6H_2 = {}_{6+2-1}C_2 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

따라서 $6 \times 21 = 126$ 가지이다.

(ii) $f(3)=6$ 일 때, $f(1)$ 과 $f(2)$ 는 (나) 조건에 의하여 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복하여 2개를 고르면 된다.

$$\text{즉, } {}_6H_2 = {}_{6+2-1}C_2 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

$f(4)$ 와 $f(5)$ 는 (나) 조건에 의하여
6, 7, 8 중에서 중복하여 2 개를 고르면 된다.

$$\text{즉, } {}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

따라서 $21 \times 6 = 126$ 가지이다.

(i), (ii)에 의하여 $126 + 126 = 252$

21. 이항정리와 분할

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

$(2x^2 + \frac{1}{x})^9$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_9C_r (2x^2)^{9-r} (\frac{1}{x})^r = {}_9C_r \times 2^{9-r} \times x^{18-3r}$$

따라서 상수항은 $18 - 3r = 0$, 즉 $r = 6$ 일 때
이므로 구하는 상수항은

$${}_9C_6 \times 2^{9-6} = {}_9C_6 \times 2^3 = 84 \times 8 = 672$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

$S(17, 1)$ 은 원소가 17개인 집합을 1개의
집합으로 분할하는 경우의 수이므로

$$S(17, 1) = 1$$

$S(17, 2)$ 는 원소가 17개인 집합을 공집합이
아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하
는 경우의 수이므로

$$\begin{aligned} S(17, 2) &= {}_{17}C_{16} \times {}_1C_1 + {}_{17}C_{15} \times {}_2C_2 + \\ &\quad {}_{17}C_{14} \times {}_3C_3 + \cdots + {}_{17}C_9 \times {}_8C_8 \\ &= {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + {}_{17}C_3 + \cdots + {}_{17}C_8 \\ &= ({}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \cdots + {}_{17}C_8) - {}_{17}C_0 \\ &= 2^{16} - 1 \end{aligned}$$

따라서

$$a = S(17, 1) + S(17, 2) = 1 + (2^{16} - 1) = 2^{16}$$

이므로 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{2^{16}} = 2^{\frac{16}{n}}$ 이다.

$2^{\frac{16}{n}}$ 이 자연수가 되어야 하므로 n 은 16의
양의 약수이어야 한다.

이때 $n \geq 2$ 이므로 조건을 만족시키는 n 은
2, 4, 8, 16이고, 그 개수는 4이다

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 14

$$(1+x)^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1x + {}_{2n}C_2x^2 + {}_{2n}C_3x^3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}x^{2n} \quad \text{..... ㉠}$$

㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$2^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$0 = {}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 - {}_{2n}C_3 + \cdots - {}_{2n}C_{2n} \quad \text{..... ㉢}$$

㉡ - ㉢을 하면

$$2^{2n} = 2({}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1})$$

이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} \\ &= 2^{2n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \log_2 f(k) &= \sum_{k=1}^n \log_2 (2^{2k-1}) = \sum_{k=1}^n (2k-1) \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \end{aligned}$$

$$\text{즉, } n^2 = 196$$

따라서 구하는 자연수 n 의 값은 14이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 9

주어진 조건에서 $a+b+c+d=10$,

$a \leq b \leq c \leq d$ 이므로 구하는 순서쌍

(a, b, c, d) 의 개수는 자연수 10을 4개의
자연수로 분할하는 방법의 수 $P(10, 4)$ 와
같다.

$$10 = 7+1+1+1 = 6+2+1+1$$

$$= 5+3+1+1 = 5+2+2+1$$

$$= 4+4+1+1 = 4+3+2+1$$

$$= 4+2+2+2 = 3+3+3+1 = 3+3+2+2$$

$$\text{이므로 } P(10, 4) = 9$$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수
는 9이다.



[정답] ③

축제 기간 중 각 팀은 1회만 공연하고 매일 2팀 이상 공연하므로 다음과 같은 2가지 경우가 나온다,

i) 첫째 날 2팀, 둘째 날 3팀이 공연하는 경우 : ${}_5C_2 \times {}_3C_3 \times 2! \times 3! = 120$

ii) 첫째 날 3팀, 둘째 날 2팀이 공연하는 경우 : ${}_5C_3 \times {}_2C_2 \times 3! \times 2! = 120$

i), ii)에서 $120 + 120 = 240$ 이다.



[정답] ⑤

(i) 1부와 2부에 공연할 팀의 수가 각각 4, 2인 경우

원소가 6개인 집합을 원소의 개수가 각각 4, 2인 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우와 같으므로 이때

의 경우의 수는 ${}_6C_4 \times {}_2C_2 = {}_6C_2 \times {}_2C_2 = 15 \times 1 = 15$

(ii) 1부와 2부에 공연할 팀의 수가 각각 3, 3인 경우

원소가 6개인 집합을 원소의 개수가 각각 3, 3인 2개의 서로소인 부분집합으로 분할한 후 두 팀을 1부와 2부에 배치하는 경우와 같으므로 이때의 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$15 + 20 = 35$$



[정답] 45

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 원소의 개수가 2인 서로 다른 두 집합을 택하는 경우는 다음 2가지이다.

i) 같은 원소가 1개 있는 경우

같은 원소를 택하는 경우의 수는 5이다. 이 각각에 대하여 두 집합의 원소를 1개씩

택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times \frac{1}{2} = 6$

그러므로 구하는 경우의 수는 $5 \times 6 = 30$ 이다.

ii) 같은 원소가 없는 경우

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times \frac{1}{2} = 15 \text{ 이다.}$$

i), ii)에서 구하는 경우의 수는

$$30 + 15 = 45 \text{ 이다.}$$

[다른풀이]

원소의 개수가 2개인 부분집합의 개수는

$${}_5C_2 = 10 \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_{10}C_2 = 45$ 이다.



[정답] ③

집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 15$ 이므로 서로 다른 두 부분집합을 임의로 택하는 경우의 수는 ${}_{15}C_2 = 105$

두 부분집합의 원소의 개수를 $a, b (a \leq b)$ 라 하면 두 부분집합이 서로소인 경우는 다음과 같다.

(i) $a = 1, b = 1$ 인 경우

두 부분집합이 서로소인 경우의 수는 4개의 원소 중 1개를 꺼내고, 남은 3개의 원소 중 1개를 꺼내면 같은 경우가 2!개씩

$$\text{나타나므로 } {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times \frac{1}{2!} = 6$$

(ii) $a = 1, b = 2$ 인 경우

두 부분집합이 서로소인 경우의 수는 4개의 원소 중 1개를 꺼내고, 남은 3개의 원소 중 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 12$$

(iii) $a = 1, b = 3$ 인 경우

두 부분집합이 서로소인 경우의 수는 4개의 원소 중 1개를 꺼내고, 남은 3개의 원소 중 3개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_1 \times {}_3C_3 = 4$$

(iv) $a = 2, b = 2$ 인 경우

두 부분집합이 서로소인 경우의 수는 4개의 원소 중 2개를 꺼내고, 남은 2개의 원

소 중 2개를 꺼내면 같은 경우가 2!개씩 나타나므로 ${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$

(i)~(iv)에서 두 부분집합이 서로소인 경우의 수는 $6 + 12 + 4 + 3 = 25$

따라서 구하는 확률은 $\frac{25}{105} = \frac{5}{21}$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

$(x + \frac{1}{x})(x^2 + ax)^6$ 의 전개식에서 x^{10} 항은 x 와 $(x^2 + ax)^6$ 의 전개식에서 x^9 항이 곱해지거나 $\frac{1}{x}$ 과 $(x^2 + ax)^6$ 의 전개식에서 x^{11} 항이 곱해질 때 나타난다.

$(x^2 + ax)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (x^2)^{6-r} (ax)^r = {}_6C_r \times a^r \times x^{12-2r} \times x^r$$

$$= {}_6C_r \times a^r \times x^{12-2r}$$

$(x^2 + ax)^6$ 의 전개식에서 x^9 항은 $12 - r = 9$, 즉 $r = 3$ 일 때이므로 x^9 의 계수는
 ${}_6C_3 \times a^3 = 20 \times a^3 = 20a^3$ 이다.

또 $(x^2 + ax)^6$ 의 전개식에서 x^{11} 항은 $12 - r = 11$, 즉 $r = 1$ 일 때이므로 x^{11} 의 계수는 ${}_6C_1 \times a^1 = 6 \times a = 6a$ 이다.

따라서 $(x + \frac{1}{x})(x^2 + ax)^6$ 의 전개식에서

x^{10} 의 계수는 $20a^3 + 6a = 172$

이 방정식을 풀면

$$20a^3 + 6a = 172$$

$$20a^3 + 6a - 172 = 0$$

$$(a - 2)(20a^2 + 40a + 86) = 0$$

$20a^2 + 40a + 86 = 0$ 에서 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 20^2 - 20 \times 86 = -1320 < 0 \text{ 이므로}$$

허근을 가진다.

따라서 $a = 2$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

(i) 조건 (가)에서 $f(1) + f(2) + f(3) = 5$ 이때 5를 3개의 자연수로 분할하는 경우는 $5 = 3 + 1 + 1$ 의 2가지이다.
 $= 2 + 2 + 1$

3, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

2, 2, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

따라서 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $3 + 3 = 6$

(ii) 조건 (나)에서 $f(4) + f(5) = 8$ 이때 8을 2개의 자연수로 분할하는 경우는 $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$ 의 4가지이다.

1, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수는 2!

2, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는 2!

3, 5을 일렬로 나열하는 경우의 수는 2!

4, 4을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{2!}{2} = 1$$

따라서 $f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $2 + 2 + 2 + 1 = 7$

(iii) 조건 (다)에서 $f(6) \leq f(7) \leq f(8)$ 이므로 $f(6), f(7), f(8)$ 를 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8에서 중복을 허락하여 두 수를 택하는 중복조합의 수 ${}_8H_3$ 와 같다. 따라서 $f(6), f(7), f(8)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_8H_3 = {}_{8+3-1}C_3 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 $6 \times 7 \times 120 = 5040$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

$$(1+x)^{10} = {}_{10}C_0 + {}_{10}C_1x + {}_{10}C_2x^2 + \cdots + {}_{10}C_{10}x^{10}$$

이므로 $x = 15$ 을 대입하면

$$(1+15)^{10} = 16^{10}$$

$$= {}_{10}C_0 + 15 \times {}_{10}C_1 + 15^2 \times {}_{10}C_2 + \dots + 15^{10} \times {}_{10}C_{10}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \log_4 ({}_{10}C_0 + 15 \times {}_{10}C_1 + 15^2 \times {}_{10}C_2 + \dots + 15^{10} \times {}_{10}C_{10}) \\ &= \log_4 16^{10} \\ &= \log_4 4^{20} \\ &= 20 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ③

9명을 3개의 팀으로 나눌 때, 각 팀의 인원이 모두 달라야 하므로 (1명, 2명, 6명) 또는 (1명, 3명, 5명) 또는 (2명, 3명, 4명)으로 나누어야 한다.

(i) 9명을 1명, 2명, 6명으로 나누는 경우

원소의 개수가 9인 집합을 원소의 개수가 각각 1, 2, 6인 세 부분집합으로 분할하는 경우의 수와 같으므로

$${}_9C_1 \times {}_8C_2 \times {}_6C_6 = 9 \times 28 \times 1 = 252$$

(ii) 9명을 1명, 3명, 5명으로 나누는 경우

원소의 개수가 9인 집합을 원소의 개수가 각각 1, 3, 5인 세 부분집합으로 분할하는 경우의 수와 같으므로

$${}_9C_1 \times {}_8C_3 \times {}_5C_5 = 9 \times 56 \times 1 = 504$$

(iii) 9명을 2명, 3명, 4명으로 나누는 경우

원소의 개수가 9인 집합을 원소의 개수가 각각 2, 3, 4인 세 부분집합으로 분할하는 경우의 수와 같으므로

$${}_9C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = 36 \times 35 \times 1 = 1260$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $252 + 504 + 1260 = 2016$

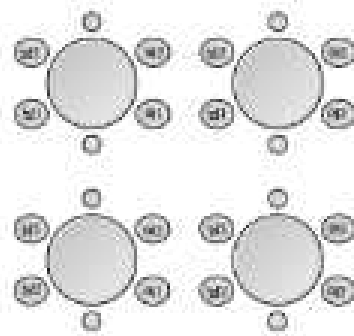
IX. 확률

22. 확률

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

학생 4명과 빈 의자 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!}$ 이고 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 생각하므로 6개의 의자가 있는 원형의 탁자에 남학생 2명과 여학생 2명이 임의로 앉는 경우의 수는



$$\frac{6!}{2!} \times \frac{1}{6} = 60$$

빈 의자 2개를 마주 보도록 놓고 빈 의자 사이에 각각 남학생 2명과 여학생 2명이 앉는 경우의 수는

$$2! \times 2! = 4$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{60} = \frac{1}{15}$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

문자 A가 적혀 있는 카드를 a , 문자 B가 적혀 있는 카드를 b , 문자 C가 적혀 있는 카드를 c 라 하자.

a, a, a, b, b, c 의 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$

적어도 한 종류의 카드가 2장 이상 연속하게 나열되는 사건을 X 라 하면 X 의 여사건 X^c 은 같은 종류의 카드끼리는 2장 이상 연속해서 나열되지 않는 것이다.

a, a, a 를 ① a ② a ③ a ④와 같이 나열한 후 ①, ②, ③, ④의 자리에 b, b, c 를 놓는 경우의 수를 구한다.

(i) ②, ③에 각각 1개의 문자를 놓는 경우 ②, ③에 각각 b, b 를 놓으면 c 는 ① 또는 ④에 놓을 수 있으므로 2가지

②, ③에 각각 b, c 또는 c, b 를 놓으면 b 는 ① 또는 ④에 놓을 수 있으므로 $2 \times 2 = 4$ (가지)

따라서 같은 종류의 카드끼리는 2장 이상 연속해서 나열되지 않는 경우의 수는 6이다.

(ii) ②, ③에 한 곳에는 2개의 문자, 다른 한 곳에는 1개의 문자를 넣는 경우

②에 bc 또는 cb 를 놓으면 ③에 b 를 놓아야 하므로 2가지

③에 bc 또는 cb 를 놓으면 ②에 b 를 놓아야 하므로 2가지

따라서 같은 종류의 카드끼리는 2장 이상 연속해서 나열되지 않는 경우의 수는 4이다.

(i), (ii)에서 같은 종류의 카드끼리는 2장 이상 연속해서 나열되지 않는 경우의 수는 $6 + 4 = 10$ 이므로

$$P(X^c) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 구하는 확률은 } P(X) &= 1 - P(X^c) \\ &= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ⑤

볼펜 2개를 꺼낼 때, 서로 다른 색의 볼펜을 꺼내는 사건을 A 라 하면 A 의 여사건 A^c 은 서로 같은 색의 볼펜을 꺼내는 사건이다.

9개의 볼펜 중에서 2개의 볼펜을 꺼낼 때, 서로 같은 색의 볼펜을 꺼내는 경우는 파란색 볼펜 4개에서 2개를 꺼내거나 검은색 볼펜 3개에서 2개를 꺼내거나 빨간색 볼펜 2개에서 2개를 꺼내는 경우이므로 그

확률은

$$\begin{aligned} P(A^c) &= \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} + \frac{{}_3C_2}{{}_9C_2} + \frac{{}_2C_2}{{}_9C_2} \\ &= \frac{6+3+1}{36} \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{5}{18} \\ &= \frac{13}{18} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

9개의 볼펜 중에서 2개의 볼펜을 꺼낼 때, 서로 다른 색의 볼펜을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} &\frac{{}_4C_1 \times {}_3C_1 + {}_4C_1 \times {}_2C_1 + {}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_9C_2} \\ &= \frac{12+8+6}{36} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

첫 번째 시행에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가 (1, 2) 또는 (3, 4) 또는 (1, 4) 또는 (2, 3)이면 두 번째 시행 후 상자 안이 비어있게 된다.

따라서 2회째 시행 후 상자 안이 비어 있게 될 확률은 $\frac{4}{{}_4C_2} \times 1 = \frac{2}{3}$ 이다.

첫 번째 시행에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가 (1, 3)이고 2회, 3회째 시행에서 위와 같은 경우가 되면 3회째 시행 후 상자 안이 비어있게 된다.

첫 번째 시행에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가 (1, 3)일 확률은

$$\begin{aligned} \frac{1}{{}_4C_2} &= \frac{1}{6} \text{이므로 구하는 확률은} \\ \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

2회째 시행 후 상자 안이 비어 있지 않

고 3회째 시행 후 상자 안이 비어 있으려면 첫 번째 시행에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가 모두 홀수이어야 하고 2회째 시행에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수는 하나는 홀수, 나머지 하나는 짝수이어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{9}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ④

$P(B) = 1 - P(B^c) = \frac{2}{3}$ 이고 두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로

$$P(A) = P(A|B) = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$$\therefore P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

EBS교재

[정답] ①

$$P(A \cap B^c) = \frac{1}{15}, P(B|A^c) = \frac{1}{3} \text{ 이고}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c 과 B, A 와 B^c 도 서로 독립이므로

$$P(B|A^c) = P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = P(A)[1 - P(B)] = \frac{2}{3}P(A) = \frac{1}{15}$$

$$\text{에서 } P(A) = \frac{1}{10}$$

따라서

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ⑤

같은 숫자가 적혀 있는 카드가 2장 이상인 사건의 여사건은 3장의 카드에 적혀 있는 숫자가 모두 다른 사건이다. 3장의 카드에 모두 다른 숫자가 적혀 있을 확률은

$$\frac{{}_4C_3 \times 3 \times 3 \times 3}{{}_{12}C_3} = \frac{27}{55} \text{ 이므로 구하는 확률은}$$

$$1 - \frac{27}{55} = \frac{28}{55} \text{ 이다.}$$

[다른 풀이]

i) 같은 숫자 카드 3장을 뽑는 경우의 수 : ${}_4C_1 \times {}_3C_3 = 4$

ii) 같은 숫자 카드 2장, 다른 숫자 카드 1장을 뽑는 경우 :

$${}_4C_1 \times {}_3C_2 \times {}_9C_1 = 108$$

i), ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4 + 108}{{}_{12}C_3} = \frac{28}{55} \text{ 이다}$$

EBS교재

[정답] ⑤

8명의 학생 중에서 임의로 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

적어도 1명의 여학생이 포함되게 뽑는 사건을 A 라 하면 A 의 여사건 A^c 은 남학생만 3명을 뽑는 사건이다.

남학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$ 이므로

$$P(A^c) = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 구하는 확률은 } P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{1}{14} \\ &= \frac{13}{14} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 /

[정답] ②

a, b, c 를 정하는 방법의 수는 모두 $6^3 = 216$ (가지)이고,

$$f(1) = 0 \text{ 이므로 } c = a + b \cdots \cdots \text{ ①}$$

꼭짓점의 x 좌표가 -1 이므로

$$b = 2a \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\textcircled{㉠} \text{과 } \textcircled{㉡} \text{에서 } c = 3a \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} \text{과 } \textcircled{㉢} \text{에서 } a = 1 \text{이면 } b = 2, c = 3$$

$$a = 2 \text{ 이면 } b = 4, c = 6$$

$$\text{따라서, 구하는 확률은 } \frac{2}{216} = \frac{1}{108} \text{ 이다.}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

함수 f 중에서 임의로 한 개의 함수를 택할 때, 지역의 원소의 개수가 3 이상인 사건을 A 라 하면 함수 f 중에서 임의로 한 개의 함수를 택할 때, 지역의 원소의 개수가 2 이하인 사건은 A^c 이다.

$$f(2) = a, f(3) = b, f(5) = c, f(6) = d \text{ 라 하면 모든 함수값의 합은 15이고}$$

$$f(1) = 2, f(4) = 3 \text{ 이므로}$$

$$a + b + c + d = 10 \text{ (} a, b, c, d \text{ 는 1 이상 6 이하의 자연수)을 만족시킨다.}$$

이때

$$a = a' + 1, b = b' + 1, c = c' + 1, d = d' + 1 \text{ 로 놓으면}$$

$$a' + b' + c' + d' = 6 \text{ (} a', b', c', d' \text{ 은 음이 아닌 5 이하의 정수)}$$

따라서 함수 f 의 개수는 4개에서 중복을 허락하여 6개를 뽑는 조합의 수에서 순서쌍 (a', b', c', d') 이 $(6, 0, 0, 0)$,

$$(0, 6, 0, 0), (0, 0, 6, 0), (0, 0, 0, 6)$$

$$\text{의 4가지를 빼주어야 하므로 (} a', b', c', d' \leq 5 \text{)}$$

$${}_4H_6 - 4 = {}_9C_6 - 4 = {}_9C_3 - 4 = 84 - 4 = 80$$

한편 $f(1) = 2, f(4) = 3$ 이므로 지역의 원소의 개수가 1인 경우는 없고, 지역의 원소의 개수가 2인 경우는 a, b, c, d 의 값이 2 또는 3이면 $a + b + c + d = 10$ 을 만족시키는 경우이므로 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

$$\therefore \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{6}{80} = \frac{3}{40}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{3}{40} \\ &= \frac{37}{40} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ③

나올 수 있는 모든 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 12 \text{ (가지)}$$

을 뽑은 1장의 카드에 적힌 수를 a 라 하고

갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱을 b 라 할 때

가능한 경우의 수는 다음과 같다.

$$(i) a = 3 \text{ 일 때, } b = 2 (= 1 \times 2)$$

$$\therefore 1 \text{ 가지}$$

$$(ii) a = 4 \text{ 일 때, } b = 2 (= 1 \times 2)$$

$$b = 3 (= 1 \times 3)$$

$$\therefore 2 \text{ 가지}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1+2}{{}_4C_2 \times {}_2C_1} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ 이다.}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ①

10개의 쿠키가 들어 있는 상자에서 동시에 3개를 꺼내는 시행에서 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_3 = 120$ 이다.

$$(i) 3 \text{ 개 모두 치즈 쿠키일 경우}$$

치즈 쿠키 5개에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_3 = 10 \text{ (가지)}$$

$$(ii) 3 \text{ 개 모두 호두 쿠키일 경우}$$

호두 쿠키 3개에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 1(가지)

$$(iii) \text{ 치즈 쿠키 1개-초콜릿 쿠키 1개-}$$

호두 쿠키 1개일 경우

치즈 쿠키 5개에서 1개, 초콜릿 쿠키 2개에서 1개, 호두 쿠키 3개에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 30(\text{가지})$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{10+1+30}{120} = \frac{79}{120} \text{이다.}$$

23. 조건부 확률

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

2015년에 문학 부문에 참가한 450명 중 2016년에 문학 부문에 참가한 학생의 수를 a , 영상 부문에 참가한 학생의 수를 b 라 하고, 2015년에 영상 부문에 참가한 150명 중 2016년에 문학 부문에 참가한 학생의 수를 c , 영상 부문에 참가한 학생의 수를 d 라 하자.

2015년		2016년	
문학 부문	450명	문학 부문	a
영상 부문		영상 부문	b
영상 부문	150명	문학 부문	c
영상 부문		영상 부문	d

임의로 선택한 한 학생이 2015년에 문학 부문에 참가했을 사건을 A , 2016년에 문학 부문에 참가했을 사건을 B 라 하면 2016년에 문학 부문에 참가했을 때, 2015년에도 문학부문에 참가했을 확률이 $\frac{5}{6}$ 이므로

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{a}{a+c} = \frac{5}{6} \quad \dots\dots$$

㉠

또한

$$a+c=420 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a=350$, $c=70$ $c+d=150$ 이므로 $d=80$

따라서 2015년에 영상 부문에 참가했을 때, 2016년에도 영상 부문에 참가했을 확률은

$$\begin{aligned} P(B^c|A^c) &= \frac{n(A^c \cap B^c)}{n(A^c)} \\ &= \frac{d}{c+d} = \frac{80}{150} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

한 개의 주사위를 5번 던질 때, 3의 배수의 눈의 수가 나온 횟수를 x

($x=0, 1, 2, 3, 4, 5$)라 하면 3의 배수의 눈의 수가 나오지 않은 횟수는 $5-x$ 이므로 $5+2x-(5-x) \geq 10$ $3x \geq 10$

따라서 $x=4, 5$

(i) $x=4$ 일 때

3의 배수의 눈의 수가 4번 나올 확률은

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{243}$$

(ii) $x=5$ 일 때

3의 배수의 눈의 수가 5번 나올 확률은

$${}_5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{10}{243} + \frac{1}{243} = \frac{11}{243}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

이 학교 학생 중 1명을 임의로 선택할 때 남학생인 사건을 A , 직업체험 전과 후 진로 희망을 바꾸지 않은 학생인 사건을 B , 이 학교 여학생의 수를 x 라 하면 직업체험 전과 후 진로 희망 변화에 따른 남녀 학생 수는 다음 표와 같다.

(단위 : 명)

	A	A^c	합계
B	$(600-x) \times 0.4$	$x \times 0.6$	$240 + 0.2x$
B^c	$(600-x) \times 0.6$	$x \times 0.4$	$360 - 0.2x$
합계	$600-x$	x	600

이 학교 학생 중 임의로 선택한 1명이 직업체험 후 진로 희망을 바꾸지 않은 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률이 p_1 이므로

$$p_1 = P(A \cap B)$$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{0.6x}{240 + 0.2x}$$

이 학교 학생 중 임의로 선택한 1명이 남학생일 때, 이 학생이 직업체험 후 진로 희망을 바꾼 학생일 확률이 p_2 이므로

$$p_2 = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$6p_1 = 5p_2 \text{이므로}$$

$$6 \times \frac{0.6x}{240 + 0.2x} = 5 \times 0.6$$

$$\frac{x}{240 + 0.2x} = \frac{5}{6} \text{에서 } 6x = 1200 + x \text{이므로}$$

$$x = 240$$

따라서 여학생의 수는 240이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은 $\frac{2}{3}$, 6의 약수가 아닐 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다. 6번의 게임 후 점수가 8이 되려면 5번의 게임 후 점수가 6이어야 한다. 한 개의 주사위를 5회 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 횟수를 $a(a=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 라 하면 6의 약수가 아닌 횟수는 $5-a$ 이므로 $2+2a-(5-a)=6$ 에서 $a=3$ 이다. 즉, 한 개의 주사위를 5회 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 경우가 3회, 6의 약수가 아닌 경우가 2회이고 6번째로 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이어야 점수가 8이 된다.

따라서 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 경우를 ○ 6의 약수가 아닌 경우를 ×로 나타낼 때 5번의 게임 후 점수가 6인 경우 중 게임도중에 점수가 0이 되는 경우는 순서대로 ×, ×, ○ ○ ○

로 1가지이고 게임도중에 점수가 8 이상 이 되는 경우는 순서대로 ○ ○ ○ ×, ×로 1가지이다.

따라서 구하는 확률은

$$({}_5C_3 - 2) \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 128 \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

이므로

$$k = 128$$

{다른 풀이}

한 개의 주사위를 6회 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 횟수를 k

($k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$)이라 하면 점수는

$$2+2k-(6-k)=3k-4$$

$3k-4=8$ 에서 $k=4$ 이므로 한 개의 주사위를 6회 던질 때 6의 약수가 4회 나와야 한다.

한편, 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수인 경우를 ○ 6의 약수가 아닌 경우를 ×로 나타낼 때 6번의 게임이 끝나기 전 점수가 0이 되는 경우와 8이상 이 되는 경우는 다음과 같다.

1회	2회	3회	4회	5회	6회
×	×	○	○	○	○
○	○	○	×	×	○
○	○	○	×	○	×
○	○	×	○	×	×
○	×	○	○	○	×
×	○	○	○	○	×
○	○	×	○	○	×

따라서 구하는 확률은

$$({}_6C_4 - 7) \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 128 \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

이므로

$$k = 128$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ①

4의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$ 이므로

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} = \frac{25}{72}$$

EBS교재

[정답] ③

세 명이 각각 주사위 1개씩 던질 때 일

어날 수 있는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

세 명 중 같은 눈의 수가 나오는 2명을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

이고, 이 3가지의 각 경우에 대하여 같은 눈의 수와 다른 눈의 수를 정하는 경우의 수는

$${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$$

이므로 같은 눈의 수가 나온 주사위가 2개인 경우의 수는

$$3 \times 30 = 90$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{90}{216} = \frac{5}{12}$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ①

두 사건 A 와 B 는 서로 독립이므로 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ 이고,

$$\frac{1}{9} = \frac{2}{3} \times P(B) \text{ 이므로 } P(B) = \frac{1}{6} \text{ 이다.}$$

EBS교재

[정답] ③

$$P(A^c) = \frac{3}{4} \text{ 에서 } 1 - P(A) = \frac{3}{4},$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B^c|A) = \frac{1}{3} \text{ 에서 } 1 - P(B|A) = \frac{1}{3},$$

$$P(B|A) = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

EBS연계 기출분석 3

[정답] 11

카드에 적힌 수의 합이 3, 4, 6, 7로 같아지는 경우는 각각 숫자 카드가

$$(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)$$

일 때뿐이다. 그러므로 합이 3, 4, 6, 7로 같아지는 확률은

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 4 = \frac{1}{9}$$

이다. 합이 5로 같아지는 경우는 숫자 카드가 (1, 4), (2, 3)일 때 뿐이다. 그러므로 합이 5로 같아지는 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

이다. 따라서 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 확률은 $\frac{2}{9}$ 이다. $p + q = 11$ 이다.

EBS교재

[정답] ①

(i) 두 수의 합이 같은 쌍이 존재하는 경우 (2, 3), (2, 3), (5, 7)

이 경우 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} = 3$

(ii) 두 수의 합이 같은 쌍이 존재하지 않는 경우

① (2, 3), (2, 5), (3, 7)을 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 $3! = 6$

② (2, 3), (2, 7), (3, 5)을 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 $3! = 6$

(i), (ii)에서 모든 경우의 수는

$$3 + 12 = 15$$

세 사람이 모두 서로 다른 수가 적혀 있는 2장의 카드를 받는 경우의 수는 15이고, 이 중에서 받은 카드에 적힌 두 수의 합이 세 사람 모두 다른 경우는 (ii)의 경우이므로 구하는 확률은

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

EBS연계 기출분석 4

[정답] ①

두 개의 주사위가 같은 눈이 나오는 사건을 A , 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 B 라고 하면 구하

는 확률은

$\frac{P(B|A)}{P(B|A)+P(B|A^c)}$ 이고, 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 때는 다음과 같은 2가지 경우가 있다.

i) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 같을 때

두 주사위의 눈의 수가 같을 확률은 $\frac{1}{6}$ 이고 동전을 4번 던졌을 때, 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나올 확률은 ${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$ 이므로 구하는 확률 $P(B|A) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$ 이다.

ii) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 다를 때

두 주사위의 눈의 수가 다를 확률은 $\frac{5}{6}$ 이고 동전을 2번 던졌을 때, 앞면과 뒷면이 각각 1번씩 나올 확률은 ${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 이므로 구하는 확률 $P(B|A^c) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{5}{12}} = \frac{3}{23}$ 이다.



[정답] ④

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같은 사건을 A라 하고 주어진 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 C라 하자.

(i) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 같은 경우

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$P(C|A)$ 는 동전을 4번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나오는 확률이므로

$$P(C|A) = {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= P(A)P(C|A) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

(ii) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 다른 경우

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$P(C|A^c)$ 은 동전을 2번 던져서 앞면이 1번, 뒷면이 1번 나오는 확률이므로

$$P(C|A^c) = {}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap C) &= P(A^c)P(C|A^c) \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P(A^c \cap C) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{5}{12} \\ &= \frac{23}{48} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 /

[정답] ⑤

동전을 n 번 던진 경우 앞면이 나온 경우가 a 번이면 뒷면이 나온 경우는 $(n-a)$ 번이다.

앞면이 나오면 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 이동하므로

$$2a + (n-a) = 8, \quad a + n = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a - 2(n-a) = -1, \quad 3a - 2n = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $a=3, n=5$

즉, 동전을 5번 던졌을 때 앞면이 3번 나와야 하므로

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

따라서 $n=5, p=16, q=5$ 이므로

$$n+p+q = 5+16+5 = 26$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

(i) $a < b$ 인 경우의 수는

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자에서 2개의 숫자를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_6C_2 = 15$$

$$\therefore \frac{15}{36} \times \frac{2}{4} = \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{24}$$

(ii) $a \leq b$ 인 경우의 수는

$$36 - 15 = 21$$

$$\therefore \frac{21}{36} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{48}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{5}{24} + \frac{7}{48} = \frac{17}{48}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

10개의 상자에서 한 개의 상자를 택하여 임의로 한 개의 공을 꺼냈을 때 이 공이 흰 공인 사건을 A , 네 번째 상자를 택하는 사건을 B 라 하자.

10개의 상자에 들어 있는 흰 공과 검은 공을 모두 합치면 흰 공의 개수는 55, 검은 공의 개수는 45이다. 각 상자를 택할 확률이 모두 같으므로 사건 A 는 흰 공 55개, 검은 공 45개가 들어 있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼냈을 때 이 공이 흰 공인 사건과 같으므로

$$P(A) = \frac{55}{100}$$

네 번째 상자에서 흰 공이 나올 확률은

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{100}$$

이므로 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{55}{100}} = \frac{4}{55}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ④

처음 꺼낸 공이 검은 공일 사건을 B , 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 W 라 하면

$$P(W) = P(B \cap W) + P(B^C \cap W)$$

(i) 처음 꺼낸 공이 검은 공일 확률은

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

검은 공을 하나 추가하여 주머니 속에 넣으면 이제 주머니 속에 검은 공 3개와 흰 공 3개가 들어 있게 되므로 여기서 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(W|B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(B \cap W) = P(B)P(W|B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

(ii) 처음 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$P(B^C) = \frac{3}{5}$$

흰 공을 하나 추가하여 주머니 속에 넣으면 이제 주머니 속에 검은 공 2개와 흰 공 4개가 들어 있게 되므로 여기서 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(W|B^C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B^C \cap W) = P(B^C)P(W|B^C) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(W) = P(B \cap W) + P(B^C \cap W) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

이다.

X. 통계

24. 이산확률분포

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②

확률의 총합은 1 이므로

$$\frac{1}{6} + a + \frac{1}{4} + b = 1, \quad a + b + \frac{5}{12} = 1$$

$$a + b = \frac{7}{12} \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

확률변수 X 의 평균이 $\frac{7}{4}$ 이므로

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times a + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times b = \frac{7}{4},$$

$$a + \frac{1}{2} + 3b = \frac{7}{4}, \quad a + 3b = \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{에서 } a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{3}$$

$$\text{이때 } E(X) = \frac{7}{4}, \quad E(X^2) = \frac{17}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{17}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{68 - 49}{16} = \frac{19}{16} \end{aligned}$$

이므로

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{19}{16}} = \frac{\sqrt{19}}{4}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

1회의 시행에서 검은 공이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{18}C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$$

(단, $x = 0, 1, 2, \dots, 18$)

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B(18, \frac{1}{3})$ 을

$$\text{따르므로 } V(X) = 18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 4$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$$

따라서

$$\sigma(-3X+2) = |-3| \sigma(X) = 3 \times 2 = 6$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 768

확률변수 X 가 가지는 값이

$2, 2^2, 2^3, \dots, 2^9, 2^{10}$ 이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	2^2	$\dots$	2^9	2^{10}	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\dots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^9$	a	1

확률의 총합이 1 이므로

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + a = 1$$

$$\frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} + a = 1$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 + a = 1 \quad \text{따라서 } a = \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) + (2^2)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad + (2^3)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &\quad + \dots + (2^9)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 + (2^{10})^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 \\ &= (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9) + 2^{11} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} + 2^{11}$$

$$= 2^{11} + 2^{10} - 2$$

$$= 2^{11} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 2$$

$$= \frac{3}{2} \times 2^{11} - 2$$

$$\text{에서 } b = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \times 2^9 = 768$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

주머니에 들어 있는 공의 개수는

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

한 번의 시행에서 k 이상인 수가 적힌 공이 나올 확률은

$$\begin{aligned} \frac{k}{55} + \frac{k+1}{55} + \dots + \frac{10}{55} &= \frac{1}{55} \times \frac{(11-k)(k+10)}{2} \\ &= \frac{(11-k)(k+10)}{110} \end{aligned}$$

확률변수 X 가 이항분포

$B\left(110, \frac{(11-k)(k+10)}{110}\right)$ 을 따르므로
 $E(X) = (11-k)(k+10) = 68$
 $-k^2 + k + 42 = 0$ 에서 $k^2 - k - 42 = 0$ 이므로
 $(k-7)(k+6) = 0$
따라서 $k = -6$ 또는 $k = 7$
 $k > 0$ 이므로 $k = 7$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 250

확률변수 X 에 대하여

$$P(X=k) = {}_{64}C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{64-k}$$

($k = 0, 1, 2, \dots, 64$) 이라 하면

X 는 이항분포 $B(64, \frac{1}{4})$ 을 따르므로

$$E(X) = 64 \times \frac{1}{4} = 16$$

$$V(X) = 64 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 12$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 12 + 16^2 = 268$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{64} (k^2 - k - 2) \cdot {}_{64}C_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{64-k} \\ &= E(X^2) - E(X) - 2 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^{64} \\ &= 268 - 16 - 2 \times 1 = 250 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{5} + a + b = 1$$

$$\text{즉, } a + b = \frac{4}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$E(X) = 3$ 에서

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times a + 4 \times b = 3 \text{이므로}$$

$$3a + 4b = \frac{13}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{3}{5}, b = \frac{1}{5}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$P(X > 3) = P(X = 4) = \frac{1}{5}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 105

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6, 7이다.

갑, 을이 4장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 6 \times 6 = 36$$

(i) $X=3$ 일 때, 갑과 을 모두 1, 2가 적혀 있는 카드가 나온 경우이므로

$$P(X=3) = \frac{1}{36}$$

(ii) $X=4$ 일 때, 갑이 (1, 3)을 뽑았을 경우 을이 (1, 2) 또는 (1, 3)을 뽑으면 되므로 2가지이다. 반대로 을이 (1, 3)을 뽑고 을이 (1, 2) 또는 (1, 3)을 뽑으면 된다. 겹치는 경우를 제외하면 $2 \times 2 - 1 = 3$ 가지이다. $P(X=4) = \frac{3}{36}$

(iii) $X=5$ 일 때, 갑이 (1, 4) 또는 (2, 3)을 뽑았을 경우 을이

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)을 뽑으면

되고 을이 (1, 4) 또는 (2, 3)을 뽑았을 경우 갑이 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)을 뽑으면 된다. 겹치는 경우를 제외하면

$$4 \times 4 - 4 = 12 \text{ 가지이다. } P(X=5) = \frac{12}{36}$$

(iv) $X=6$ 일 때도 같은 방법으로

$$P(X=6) = \frac{9}{36}$$

(v) $X=7$ 일 때도 같은 방법으로

$$P(X=7) = \frac{11}{36}$$

(i)~(v)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

$$E(X) = \frac{103}{18}$$

$$E(18X+2) = 18E(X) + 2 \\ = 18 \times \frac{103}{18} + 2 = 105$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 32

$P(X=1) = p_1$ 이라 하면

$$P(X=2) = p_1 \times \frac{1}{2}$$

$$P(X=4) = P(X=2) \times \frac{1}{2} \\ = \left(p_1 \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \\ = p_1 \times \frac{1}{4}$$

$$P(X=8) = P(X=4) \times \frac{1}{8} \\ = \left(p_1 \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2} \\ = p_1 \times \frac{1}{8}$$

확률의 총합은 1이므로

$$p_1 + \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{8}p_1 = 1$$

$$\frac{8}{15}p_1 = 1, \quad p_1 = \frac{15}{8}$$

따라서

$$E(X) = 4p_1 = \frac{32}{15}$$

$$E(15X) = 15 \times \frac{32}{15} = 32$$

25. 연속확률분포

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 8

확률변수 X 의 확률밀도함수를 $f(x)$ 라

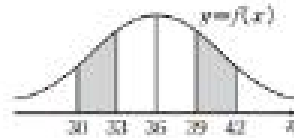
하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=36$ 에 대하여 대칭이고

$P(30 \leq X \leq 33)$ 의 값은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=30$,

$x=33$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서

$$P(30 \leq X \leq 33) = P(36-6 \leq X \leq 36-3) \\ = P(36+3 \leq X \leq 36+6) = P(39 \leq X \leq 42)$$



$$P(30 \leq X \leq 33) < P(30+a \leq X \leq 33+a)$$

.....㉠에서

$$33-30 = (33+a) - (30+a)$$

이므로 ㉠이 성립하려면

$30 < 30+a < 39$, 즉 $0 < a < 9$ 이어야 한다.

따라서 자연수 a 의 최댓값은 8이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

두 개의 주사위를 동시에 던져 두 주사위의 눈의 수가 같을 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 이므로 게임을 720번 반복했을 때,

3점을 얻는 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B(720, \frac{1}{6})$ 을 따른다.

$$E(X) = 720 \times \frac{1}{6} = 120$$

$$V(X) = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 10^2$$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(120, 10^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-120}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 따라서 3점을 얻는 횟수가 X 일 때, 점수의 총합은 $3X$ 이므로

$$\begin{aligned}
 P(3X \geq 390) &= P(X \geq 130) \\
 &= P\left(Z \geq \frac{130-120}{10}\right) = P(Z \geq 1) \\
 &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587
 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

이 지역 각 스마트폰 가입자가 한 달 동안 사용한 음성통화량과 데이터 사용량을 각각 확률변수 X, Y 라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(150, 5^2)$ 을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{X-150}{5}$ 은 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다. 확률변수 Y 는 정규분포 $N(300, 20^2)$ 을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{Y-300}{20}$ 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 $P(X \geq k) = P(Y \leq 5k)$ 이므로

$$P\left(Z \geq \frac{k-150}{5}\right) = P\left(Z \leq \frac{5k-300}{20}\right)$$

따라서 $\frac{k-150}{5} + \frac{5k-300}{20} = 0$ 이므로

$$k = 100$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 95

$Z = \frac{X-100}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{\infty} f(3n+c) \\
 &= f(3+c) + f(6+c) + f(9+c) + \dots \\
 &= P(3+c \leq X \leq 6+c) \\
 &\quad + P(6+c \leq X \leq 9+c) + \dots \\
 &= P(X \geq 3+c) = P\left(Z \geq \frac{c-97}{2}\right)
 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}
 0.8413 &= 0.5 + 0.3413 \\
 &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1) = P(Z \geq -1)
 \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{c-97}{2} = -1$$

따라서 $c = 95$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ③

(i) $m < 10 < 20$ 인 경우

$f(10) > f(20)$ 이므로 $f(4) > f(22)$ 이므로 조건(나)에 모순이 된다.

(ii) $10 < m < 20$ 인 경우

조건(가)에서 $f(10) > f(20)$ 이므로

$m-10 < 20-m$ 이다. 즉, $m < 15$ 이다.

조건(나)에서 $f(4) > f(22)$ 이므로

$m-4 > 22-m$ 이다. 즉, $m > 13$

이다. 따라서

$$13 < m < 15$$

이고 m 이 자연수 이므로

$$m = 14$$

이다. 따라서

$$P(17 \leq X \leq 18)$$

$$= P\left(\frac{17-14}{5} \leq Z \leq \frac{18-14}{5}\right)$$

$$= P(0.6 \leq Z \leq 0.8)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.8) - P(0 \leq Z \leq 0.6)$$

$$= 0.288 - 0.226 = 0.062$$

EBS교재

[정답] 27

(i) $m < 10$ 이므로 자연수 m 의 값은 1, 2, 3, ..., 9이고, 그 개수는 9이다.

(ii) $\sigma < 4$ 이므로 자연수 σ 의 값은 1, 2, 3이고, 그 개수는 3이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$9 \times 3 = 27$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

따라서 $\frac{1}{2} \times (b+1)a = 1$ 에서 $ab + a = 2$

.....㉠

$$P(-b \leq X \leq 0) = 3P(0 \leq X \leq 1)$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{3}{2}a \text{ 이고 } b = 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{㉠에서 } a = \frac{1}{2}$$

$$P\left(-\frac{b}{3} \leq X \leq 1\right) = 1 - \frac{2}{9}ab = \frac{2}{3}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 69

학생 1 명의 시험점수를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(50, 10^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-50}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 대표로 선발되기 위한 최소점수를 x 라고 하면

$$P(X \geq x) = 0.03 \text{ 에서}$$

$$P(X \geq x) = P\left(Z \geq \frac{x-50}{10}\right)$$

$$= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{x-50}{10}\right)$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{x-50}{10}\right) = 0.47 \text{ 이다.}$$

이때

$$P(0 \leq Z \leq 1.9) = 0.47 \text{ 이므로}$$

$$\frac{x-50}{10} = 1.9$$

$$\text{따라서 } x = 50 + 19 = 69$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ③

$P(X \leq 18) = P(X \geq 30)$ 이므로 X 의 평균은 $m = 24$ 이다.

$$P(23 \leq X \leq 25) = 0.3174 \text{ 에서}$$

$$P(23 \leq X \leq 24) = 0.1587$$

$$P(X \leq 23) = 0.5 - P(23 \leq X \leq 24) = 0.3413$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ④

예약자가 공항에 나오지 않거나 항공편 예약변경을 할 확률이 $\frac{1}{10}$ 이므로

400 건의 예약자 중에 공항에 나오지 않거나 항공편 예약변경을 하는 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{10}\right)$ 을 따른다.

이때 400 이 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따르며, 확률변수 $Z = \frac{X-40}{6}$ 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 공항에 나온 사람들 모두가 좌석에 앉을 수 있을 확률은

$$P(X \geq 28) = P(Z \geq -2)$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

26. 통계적 추정

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 119

모평균이 25, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 4이므로

$$E(\bar{X}) = 25$$

$$V(\bar{X}) = \frac{8^2}{4} = 16$$

이때

$$E(2\bar{X} + 5) = 2E(\bar{X}) + 5 = 2 \times 25 + 5 = 55$$

$$V(2\bar{X} + 5) = 4V(\bar{X}) = 4 \times 16 = 64$$

따라서

$$E(2\bar{X} + 5) + V(2\bar{X} + 5) = 55 + 64 = 119$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

임의추출한 150 명 중에서 A 포털의 이메일 서비스를 이용하는 학생의 비율을 확률변수 $\hat{p}$ 이라 하면

$$E(\hat{p}) = 0.4, V(\hat{p}) = \frac{0.4 \times 0.6}{150} = 0.04^2 \text{ 이}$$

므로 확률변수 $\hat{p}$ 은 정규분포 $N(0.4, 0.04^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\hat{p} - 0.4}{0.04}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\hat{p} \geq 0.38) &= P\left(Z \geq \frac{0.38 - 0.4}{0.04}\right) \\ &= P(Z \geq -0.5) = P(-0.5 \leq Z \leq 0) + 0.5 \\ &= 0.1915 + 0.5 = 0.6915 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

모평균이 m , 모표준편차가 σ 인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n 인 표본평균을 $\bar{x}$ 라 하면 신뢰도 99%로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로

$$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5.16\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{따라서 } \frac{5.16\sigma}{\sqrt{n}} = 0.86\sigma, \sqrt{n} = \frac{5.16}{0.86} = 6$$

이므로 $n = 36$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 576

모집단에서 크기가 300인 표본을 임의추출하여 얻은 표본비율이 $\hat{p}_1$ 일때 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p}_1 - 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{300}} \leq p \leq \hat{p}_1 + 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{300}}$$

이므로 $\hat{p}_1 = \frac{1}{4}$

$$c = 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{300}} = 1.96 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{10}$$

모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출

하여 얻은 표본비율이 $\hat{p}_2$ 일 때 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p}_2 - 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}} \leq p \leq \hat{p}_2 + 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}$$

이므로

$$\hat{p}_2 = \frac{4}{5} \hat{p}_1 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$d = 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}} = 1.96 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

이때 $2c = 3d$ 에서

$$2 \times 1.96 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = 3 \times 1.96 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

이므로 $\sqrt{n} = 24$

따라서 $n = 576$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ③

정규분포 $N(0, 4^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\bar{X}$ 이므로 확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(0, \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$ 을 따른다. 정규분포 $N(3, 2^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\bar{Y}$ 이므로 확률변수 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \geq 1) = P(\bar{Y} \leq a)$$

에서

$$P\left(Z \geq \frac{1-0}{\frac{4}{3}}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-3}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$P\left(Z \geq \frac{3}{4}\right) = P(Z \leq 2(a-3))$$

이고, 식이 성립하기 위해서는 $\frac{3}{4}$ 과

$2(a-3)$ 은 크기가 같고 부호가 반대이어야 한다. 즉,

$$\frac{3}{4} + 2(a-3) = 0$$

이다. 따라서 $a = \frac{21}{8}$ 이다.



[정답] ④

확률변수 X 가 정규분포 $N(100, 6^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-100}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 112) = P\left(\frac{X-100}{6} \leq \frac{112-100}{6}\right) \\ = P(Z \leq 2) \dots \dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{한편, } E(\bar{X}) = 100, V(\bar{X}) = \frac{6^2}{9} = 4 = 2^2$$

이므로 확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(100, 2^2)$ 을 따르고 $Z = \frac{\bar{X}-100}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \geq a) = P\left(\frac{\bar{X}-100}{2} \geq \frac{a-100}{2}\right) \\ = P\left(Z \geq \frac{a-100}{2}\right) \dots \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{a-100}{2} = -2$$

따라서 구하는 상수 a 의 값은 96이다.



[정답] ④

신뢰도 99%의 신뢰구간을

$\bar{x} - c \leq m \leq \bar{x} + c$ 라 할 때, c 는 표본평균과 모평균의 차이의 최댓값이다.

$$\text{따라서 } c = 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{64}} = 12.9 \text{ 이다.}$$



[정답] ②

모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}}$$

따라서 c 의 값은

$$c = 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}} = 2.58 \times \frac{1}{2} = 1.29$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

이 공장에서 만든 과즙음료 한 개의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(210, 10^2)$ 을 따른다.

생산된 과즙음료 중에서 임의추출한 4개의 무게의 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하면

$$E(\bar{X}) = 210, \sigma(\bar{X}) = \frac{10}{\sqrt{4}} = 5$$

이므로 확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(210, 5^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X}-210}{5}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(4\bar{X} \leq 800) = P(\bar{X} \leq 200) = P(Z \leq -2) \\ = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.0228$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 400

$$P(|\bar{X} - m| \leq 0.2) = P(-0.2 \leq \bar{X} - m \leq 0.2)$$

$$= P\left(-0.2 \times \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \frac{\bar{X}-m}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \leq 0.2 \times \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$= P(-0.1 \times \sqrt{n} \leq Z \leq 0.1 \times \sqrt{n}) \text{ 이다.}$$

$$P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4750 \text{ 이므로}$$

$$= P(-0.1 \times \sqrt{n} \leq Z \leq 0.1 \times \sqrt{n}) \geq 0.95$$

를 만족하기 위해서는

$$0.1 \times \sqrt{n} \geq 2, n \geq 400 \text{ 이므로 } n \text{의 최솟값은 } 400 \text{ 이다.}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

고등학교 학생 중에서 임의추출한 400명의 학생 중 스마트폰을 가지고 있는 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 $p=0.8$ 이고 표본의 크기 $n=400$ 은 충분히 크므로 확률변

$$\text{수 } Z = \frac{\hat{p} - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{400}}} \text{ 는 근사적으로 표준정}$$

규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\hat{p} \leq \frac{332}{400}) &= P(\hat{p} \leq 0.83) = P(Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 + 0.4332 \\ &= 0.9332 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 150

모집단에서 임의로 200 명을 추출하여 구한 표본비율이 $\frac{1}{9}$ 일 때, 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{9} - k, \frac{1}{9} + k\right]$ 이므로

$$k = 1.96 \sqrt{\frac{\frac{1}{9} \times \frac{8}{9}}{200}} = 1.96 \times \frac{1}{45} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

또, 모집단에서 임의로 n 명을 추출하여 구한 표본비율이 $\frac{1}{7}$ 일 때, 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\left[\frac{1}{7} - \frac{9}{7}k, \frac{1}{7} + \frac{9}{7}k\right] \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{7}k &= 1.96 \sqrt{\frac{\frac{1}{7} \times \frac{6}{7}}{n}} = 1.96 \times \frac{\sqrt{6}}{7} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{9}{7} \times 1.96 \times \frac{1}{45} &= 1.96 \times \frac{\sqrt{6}}{7} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \sqrt{n} &= 5\sqrt{6} \quad \therefore n = 150 \end{aligned}$$