

01. 수열의 극한

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

이차방정식 $x^2 - (n+1)x + a_n = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (n+1)^2 - 4a_n \geq 0, \quad \text{즉}$$

$$a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이차방정식 $x^2 - nx + a_n = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = n^2 - 4a_n < 0, \quad \text{즉}$$

$$a_n > \frac{n^2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②으로부터

$$\frac{n^2}{4} < a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\text{즉 } \frac{n^2}{4n^2} < \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{(n+1)^2}{4n^2} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ 이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{4} = \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{4}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3x-2)^n}{5^n + 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3x-2}{7}\right)^n}{\left(\frac{5}{7}\right)^n + 1} \text{에서 수열}$$

$$\left\{ \frac{(3x-2)^n}{5^n + 7^n} \right\} \text{이 수렴하려면 등비수열}$$

$$\left\{ \left(\frac{3x-2}{7}\right)^n \right\} \text{이 수렴해야 하므로}$$

$$-1 < \frac{3x-2}{7} \leq 1, \quad -7 < 3x-2 \leq 7,$$

$$-5 < 3x \leq 9$$

$$\text{즉, } -\frac{5}{3} < x \leq 3$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 의 값은 $-1, 0, 1, 2, 3$ 이고, 그 개수는 5이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 8

원 $C : (x-a)^2 + (y-b)^2 = 2n^2$ 이 두 직선 $y = x+2$, $y = -x+2$ 와 모두 만나려면 원 C 의 중심 (a, b) 와 두 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}n$ 보다 작거나 같아야 한다.

원 C 가 직선 $y = x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 과 만나려면

$$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \leq \sqrt{2}n,$$

$$|a-b+2| \leq 2n \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 원 C 가 직선 $y = -x+2$, 즉

$x+y-2=0$ 과 만나려면

$$\frac{|a+b-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq \sqrt{2}n, \quad |a+b-2| \leq 2n$$

$\dots\dots \textcircled{㉡}$

①, ②에서 a_n 은

$$-2n-2 \leq a-b \leq 2n-2 \text{와}$$

$$-2n+2 \leq a+b \leq 2n+2$$

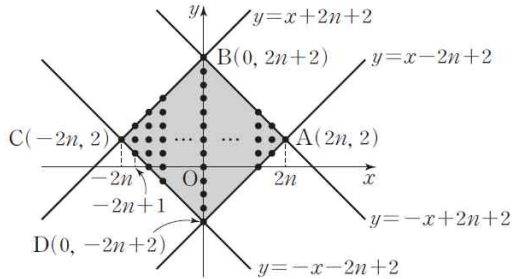
를 모두 만족시키는 두 정수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수이다.

좌표평면 위에서 부등식

$$-2n-2 \leq x-y \leq 2n-2 \text{와}$$

$$-2n+2 \leq x+y \leq 2n+2 \text{가 나타내는 영역}$$

은 그림의 색칠한 부분(경계 포함)이다.



구하는 두 정수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 그림의 정사각형 ABCD의 내부와 네 변 위에 있는 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.

x 좌표에 따라 y 좌표가 정수인 점의 개수를 구하면 다음과 같다.

x 좌표가 0일 때,

$$2n+2 - (-2n+2) + 1 = 4n+1$$

x 좌표가 1일 때,

$$2n+1 - (-2n+3) + 1 = 4n-1$$

x 좌표가 2일 때,

$$2n - (-2n+4) + 1 = 4n-3$$

x 좌표가 3일 때,

$$2n-1 - (-2n+5) + 1 = 4n-5$$

$\vdots$

x 좌표가 $2n$ 일 때, $2-2+1=1$

또한 정사각형 ABCD는 y 축에 대하여 대칭

이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 4n+1 + 2 \sum_{k=1}^{2n} \{4n - (2k-1)\} \\ &= 4n+1 + 2 \sum_{k=1}^{2n} (4n+1-2k) \\ &= 4n+1 + 2 \sum_{k=1}^{2n} (4n+1) - 4 \sum_{k=1}^{2n} k \\ &= 4n+1 + 2 \times (4n+1) \times 2n - 4 \times \frac{2n(2n+1)}{2} \\ &= 4n+1 + 16n^2 + 4n - 8n^2 - 4n \\ &= 8n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 4n + 1}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} = 8 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 9

조건 (가)에서

$$\frac{n(n+1)}{2} < a_n < \frac{n(n+2)}{2} \text{의 각 변을 } n^2 \text{으로 나누면}$$

로 나누면

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} < \frac{a-n}{n^2} < \frac{n(n+2)}{2n^2}$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

조건 (나)에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 b_n + n}{a_n + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + \frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n^2} + 1} = 12$$

이때 수열 $\{b_n\}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + \frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n^2} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n + 0}{\frac{1}{2} + 1} = 12$$

$$\text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 18$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{1}{2} \times 18 = 9 \end{aligned}$$



EBS연계 기출분석 1

[정답] 16

두 점 P_n, Q_n 의 좌표는 각각

$P_n(4^n, 2^n), P_{n+1}(4^{n+1}, 2^{n+1})$ 이므로

선분 $P_n P_{n+1}$ 의 길이 L_n 은

$$L_n = \sqrt{(4^{n+1} - 4^n)^2 + (2^{n+1} - 2^n)^2}$$

$$= \sqrt{9 \times 16^n + 4^n} \text{ 이다.}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{L_{n+1}}{L_n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \times 16^{n+1} + 4^{n+1}}{9 \times 16^n + 4^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \times 16 + 4 \times \left(\frac{1}{4} \right)^n}{9 + \left(\frac{1}{4} \right)^n} = 16$$



[정답] ④

곡선과 직선이 만나는 두 점을 각각

$(\alpha, n\alpha)$, $(\beta, n\beta)$ 라 하자. ($\alpha > \beta$)

$$a_n = (\alpha - \beta) \sqrt{1 + n^2}$$

인테 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta$ 이므로

$$\alpha - \beta = \frac{2}{\sqrt{n}} \text{ 이다.}$$

따라서 $a_n = 2 \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n}}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} a_{n+1} - \sqrt{n} a_n)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 + 1})$$

$$= 2$$



[정답] ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{n+1} - 4^n}{8^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{4^n}{8^n}}{1 + \frac{3}{8^n}} = \frac{8 - 0}{1 + 0} = 8$$



[정답] 35

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(10n+1)b_n}{a_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n} \times \frac{(10n+1)(n+1)}{n^2+1} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(10n+1)(n+1)}{n^2+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(10 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{7}{2} \times \frac{10}{1} = 35$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] $\frac{1}{2}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

따라서 $S_{2n} = \frac{2n}{2n+1}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(S_{2n} - S_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n}{2n+1} - \frac{n}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] $\frac{3}{16}$

$$a_n = {}_n C_3 \cdot 2^3 = \frac{4n(n-1)(n-2)}{3} \quad (n \geq 3)$$

따라서

$$\frac{1}{a_n} = \frac{3}{8} \left\{ \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)} \right\}$$

그러므로

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{a_k} = \frac{3}{8} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)} \right\}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \frac{1}{a_k} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] $\frac{1}{2}$

$$S_n = n(2n-1)a_n$$

$$S_{n-1} = (n-1)(2n-3)a_{n-1}$$

이므로

$$a_n = (2n^2 - n)a_n - (2n^2 - 5n + 3)a_{n-1}$$

이다. 따라서

$$(2n+1)(n-1)a_n = (2n-3)(n-1)a_{n-1}$$

에서 $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 이다.

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(1 - \frac{b_n}{a_n} \right) = 3 \text{ 에}$$

서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{b_n}{a_n} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ 이다. 그러므로

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n^2}{b_n} - \frac{b_n^2}{a_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n - b_n)(a_n^2 + a_n b_n + b_n^2)}{a_n b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \left(\frac{a_n}{b_n} + 1 + \frac{b_n}{a_n} \right) = 9 \end{aligned}$$

02. 급수

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

을 만족시키고, $a_1 \neq 0$ 이므로 $a_n \neq 0$ 이다.

㉠의 양변을 a_n 으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3} \text{ 이고,}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{(n+1)+2} = \frac{n+1}{n+3} \text{ 이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3}{a_2} \right) + \left(\frac{a_3}{a_2} - \frac{a_4}{a_3} \right) + \left(\frac{a_4}{a_3} - \frac{a_5}{a_4} \right) \end{aligned}$$

$$+ \dots + \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right)$$

$$= \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{n+3}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{n+1}{n+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

(i) $a_1 = S_1 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} & a_n = S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{2} (n^2 + 3n) - \frac{1}{2} \{ (n-1)^2 + 3(n-1) \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (n^2 + 3n) - \frac{1}{2} \{ (n^2 - 2n + 1) + (3n - 3) \}$$

$$= n + 1$$

(i), (ii)에 의하여 $a_n = n + 1$ ($n \geq 1$)

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+2}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+2}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 5

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1} \right) = 0$$

$$\text{이때 } a_n - \frac{5n}{n+1} = b_n$$

$$\text{이라 하면 } a_n = b_n + \frac{5n}{n+1} \text{ 이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{5n}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= 0 + 5$$

$$= 5$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

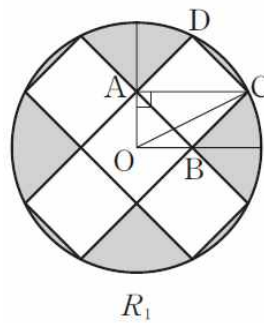


그림 R_1 에서 원의 중심을 O라 하고 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x 라 하면

$$\overline{AC} = \sqrt{2}x$$

$$\overline{AO} = \overline{BO} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

이므로 $\overline{AO}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{OC}^2$ 에서

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x \right)^2 + (\sqrt{2}x)^2 = 1$$

$$\frac{5}{2}x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

따라서 그림 R_1 에서 모양의 도형의 넓

이는 $5 \times \left(\frac{\sqrt{10}}{5} \right)^2 = 2$ 이므로 그림 R_1 에서 색칠된 부분의 넓이는 $\pi - 2$ 이다.

그림 R_2 에서 모양의 도형 안에 새로 그려지는 원의 반지름의 길이는 정사각형의

$$(a_n)^2 - 6a_n a_{n+1} + 5(a_{n+1})^2 = 0$$

$$(a_n - 5a_{n+1})(a_n - a_{n+1}) = 0$$

$$a_n \neq a_{n+1} \text{ 이므로 } a_n - 5a_{n+1} = 0$$

$$\text{즉, } a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$$

두 직사각형 $A_1 B_n C_n D_n$,

$A_1 B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ 은 닮음비가

$1 : \frac{1}{5}$ 인 서로 닮은 도형이므로 두 직사각형

$A_1 B_n C_n D_n$, $A_1 B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ 에 각각 그려진 반원의 넓이의 비는

$$1^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 : \frac{1}{25}$$

이때 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이의 합 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \frac{1}{25} S_1 + \left(\frac{1}{25}\right)^2 S_1 + \cdots + \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1} S_1 \\ &= S_1 \left\{ 1 + \frac{1}{25} + \left(\frac{1}{25}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= S_1 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{25}} \\ &= \frac{25}{24} \times S_1 = \frac{25}{24} \times \frac{\pi}{2} = \frac{25}{48} \pi \end{aligned}$$

따라서 $p = 48$, $q = 25$ 이므로

$p + q = 48 + 25 = 73$ 이다.

EBS연계 기출분석 2

[정답] ①

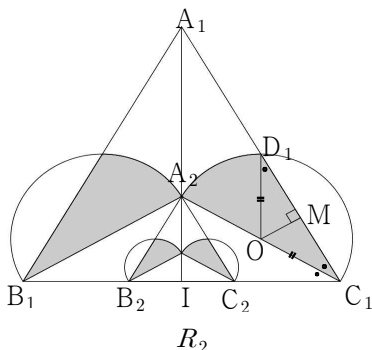


그림 R_2 에서 점 A_1 에서 $\overline{B_1 C_1}$ 에 내린 수선

의 발을 I , $\overline{A_1 C_1}$ 과 반원 $A_2 C_1$ 의 교점 중 C_1 이 아닌 점을 D_1 , 반원 $A_2 C_1$ 의 중심을 O , O 에서 $\overline{C_1 D_1}$ 에 내린 수선의 발을 M 이라 하자.

$\angle A_1 C_1 A_2 = 30^\circ$ 이므로 원주각의 성질에 의해 $\angle A_2 O D_1 = 60^\circ$ 이다.

직각삼각형 $A_1 C_1 I$ 에서

$$\overline{A_1 C_1} = 2\sqrt{3}, \overline{IC_1} = \sqrt{3} \text{ 이므로,}$$

직각삼각형 $A_2 C_1 I$ 에서 $\overline{A_2 C_1} = 2$ 가 된다.

따라서 $\overline{OC_1} = 1$ 이고

부채꼴 $A_2 O D_1$ 의 넓이는

$$\pi \times 1^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC_1}} \therefore \overline{OM} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{C_1 M}}{\overline{OC_1}} \therefore \overline{C_1 M} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이므로}$$

$\overline{C_1 D_1} = 2\overline{C_1 M} = \sqrt{3}$ 이다.

따라서 삼각형 $OC_1 D_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{C_1 D_1} \times \overline{OM} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ 이다.}$$

따라서 $S_1 = 2 \times \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

삼각형 $A_1 B_1 C_1$ 과 삼각형 $A_2 B_2 C_2$ 의 닮음비가 $3 : 1$ 이므로 넓이의 비는 $9 : 1$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{1}{9} + \\ &\quad \cdots + \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} \text{ 이므로} \end{aligned}$$

로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{9}} = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{9}{8} \\ &= \frac{3\pi}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{16} = \frac{6\pi + 9\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

EBS교재

[정답] 11

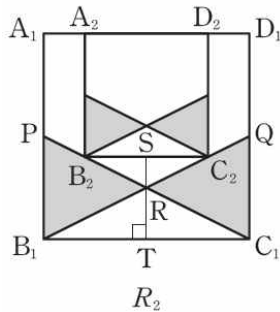


그림 R_1 의 삼각형 PB_1R 와 삼각형 QC_1R 가 서로 합동이므로 점 R 는 선분 PC_1 의 중점이다.

따라서 삼각형 PB_1R 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$S_1 = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

그럼 R_2 의 점 R에서 변 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 T라 하고 직선 TR가 변 B_2C_2 와 만나는 점을 S라 하자.

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이를 x 라
하면 $\overline{ST} = 2 - x$ 이고

$$\overline{\text{RT}} = \frac{1}{2} \text{이므로 } \overline{\text{SR}} = \frac{3}{2} - x$$

삼각형 B_1C_1R 와 삼각형 B_2C_2R 가 서로 닮음이므로

$$2 : x = \frac{1}{2} : \left(\frac{3}{2} - x \right) \text{에 서}$$

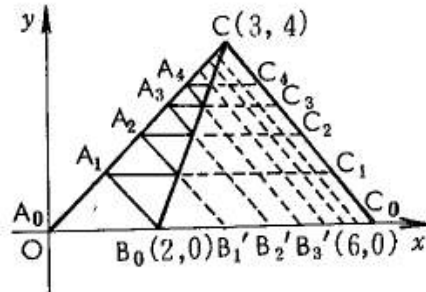
$$\frac{1}{2}x = 2\left(\frac{3}{2} - x\right)$$

$$\frac{5}{2}x = 3, \quad x = \frac{6}{5}$$

즉, 두 삼각형의 닮음비는 $2 : \frac{6}{5} = 1 : \frac{3}{5}$ 이고

넓이의 비는 $1 : \frac{9}{25}$ 이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{25}{16}$



그림에서

사각형 $B_n'B_{n+1}'B_{n+1}A_{n+1}$ 과

사각형 $A_{n+1}B_nC_nC_{n+1}$ 은 평행사변형이므로

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \overline{A_n B_n} \\ &= \overline{A_0 B_0} + \overline{A_1 B_1} + \cdot \cdot \cdot \\ &= \overline{A_0 B_0} + \overline{B_0 B_1'} + \overline{B_1' B_2'} + \cdot \cdot \cdot \\ &= \overline{A_0 C_0} = 6 \circ \mathbb{I} \mathbb{I}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \overline{A_{n+1} B_n} \\ &= \overline{A_1 B_0} + \overline{A_2 B_1} + \cdot \cdot \cdot \\ &= \overline{C_0 C_1} + \overline{C_1 C_2} + \overline{C_2 C_3} + \cdot \cdot \cdot = 5 \\ & \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{A_n B_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{A_{n+1} B_n} = 11$$

[정답] ④

$\overline{B_2 C_2} = x$ 라 하면

$$x = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ 이다.}$$

따라서

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\sqrt{7}}{4} \right)^2, \dots$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{7}{16}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

$S_m = \sum_{n=1}^m \frac{n}{k^n}$ 이라 하면

$$S_m = \frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \dots + \frac{m-1}{k^{m-1}} + \frac{m}{k^m}$$

$$k \cdot S_m = 1 + \frac{2}{k} + \dots + \frac{m}{k^{m-1}}$$

이다.

$$(k-1)S_m = 1 + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k^{m-1}} - \frac{m}{k^m}$$

i) $k=1$ 일 때 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k^n} = \infty$ 이므로 불가능하다.

ii) $k \geq 2$ 일 때 :

$$S_m = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{k}\right)^m}{1 - \frac{1}{k}} - \frac{1}{k} \cdot \frac{m}{k^m} \text{ 이므로}$$

로 $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \frac{k}{(k-1)^2}$ 이다.

따라서 $(k-1)^2 = 1$ 에서 $k=2$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ④

$$x_1 = 2 \cos 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$x_2 = x_1 + \cos 45^\circ = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{1}{2} \cos 45^\circ = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

...

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16} + \dots \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{6\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

II. 함수의 극한

03. 함수의 극한

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 16

극한값이 존재하므로

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} \{x(\sqrt{ax^2+b}-x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{ax^2+b}-x)(\sqrt{ax^2+b}+x)}{(\sqrt{ax^2+b}+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\{(a-1)x^2+b\}}{\sqrt{ax^2+b}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-1)x^2+b}{\sqrt{a+\frac{b}{x^2}}+1} \end{aligned}$$

에서 $a=1$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{x(\sqrt{ax^2+b}-x)\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{x^2}}+1} \\ &= \frac{b}{1+1} \\ &= \frac{b}{2} \end{aligned}$$

이 고 $\frac{b}{2} = 3$ 에서 $b=6$ 이므로

$10a+b=10+6=16$ 이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$-1 \leq x < 1$ 에서 $f(x)=2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 2$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

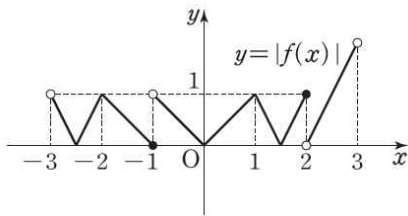
$$= 2 + (-2)$$

$$= 0$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow k} |f(x)|$ 의 값이 존재하는 정수 k 는

$-2, 0, 1$ 이다.

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$-2 + 0 + 1 = -1$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

직선 $y = x + 1$ 과 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 점 $P(t, t+1)$ 을 지나는 직선 PQ 의 방정식은

$$y - (t+1) = -(x - t), \text{ 즉 } y = -x + 2t + 1$$

이때 직선 PQ 가 y 축과 만나는 점이 Q 이므로 점 Q 의 좌표는

$$(0, 2t+1)$$

따라서

$$\overline{AP}^2 = (t+1)^2 + (t+1)^2 = 2t^2 + 4t + 2,$$

$$\overline{AQ}^2 = 1^2 + (2t+1)^2 = 4t^2 + 4t + 2$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + 4t + 2}{2t^2 + 4t + 2}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4}{t} + \frac{2}{t^2}}{2 + \frac{4}{t} + \frac{2}{t^2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ③

$x \rightarrow 0-$ 일 때, $f(x) \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0 \text{ 이다.}$$

또한 $x \rightarrow 1+$ 일 때, $f(x) \rightarrow -3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -3 \text{ 이다.}$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0 + (-3) = -3$$

EBS교재

[정답] ④

함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$$

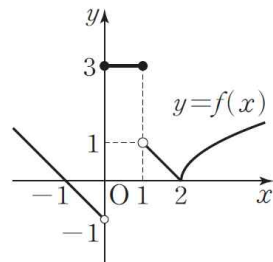
$0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) = c$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} c = c$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$ 에서

$$-1 + c = 2$$

즉, $c = 3$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 3 + 1 = 4$$



[정답] ④

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{3}{5} \text{ 에서 } f(x) \text{ 는 } x-a$$

를 인수로 갖는다. 만약 $f(x)$ 가 $x-a$ 를 인수로 갖지 않는다면 즉, $f(a) \neq 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{f(a) - 0}{f(a) + 0} = 1 \neq \frac{3}{5} \text{ 이}$$

되어 모순이다.

따라서 $f(x) = (x-a)(x-b)$ 라 둘 수 있다(단, b 는 상수).

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-b) - (x-a)}{(x-a)(x-b) + (x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-b-1)}{(x-a)(x-b+1)}$$

$$= \frac{a-b-1}{a-b+1} = \frac{3}{5} \text{ 따라서 } a-b=4 \text{ 이다. 한}$$

편 $f(x)=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$|\alpha - \beta| = |a - b| = 4 \text{ 이다.}$$



[정답] ⑤

조건 (가)에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x} \right) = f(2) = 4 + 2a + b = 0 \text{ 에서}$$

$$b = -2a - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x) = x^2 + ax - 2a - 4 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{2}{x}\right)}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{4}{x^2} + \frac{2a}{x} - 2a - 4}{2x^2 - x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 + 2ax - 2ax^2 - 4x^2}{x^2(2x^2 - x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x+1)(x-1) - 2ax(x-1)}{x^2(2x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x+1) - 2ax}{x^2(2x+1)} \\ = \frac{-8 - 2a}{3}$$

$$\frac{-8 - 2a}{3} = 4 \text{ 에서 } a = -10$$

$a = -10$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 16$

따라서 $f(x) = x^2 - 10x + 16 = (x-5)^2 - 9$ 이므로

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(5) = -9$ 이다.



[정답] ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + 1 = 2$$



[정답] ③

$P(t^2, t), H(0, t), A(1, 1), B(1, 0)$ 이므로

$$f(t) = \frac{1}{2} \times 1 \times (t^2 - 1) = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$g(t) = \frac{1}{2} \times t^2 \times (t - 1) = \frac{t^2(t - 1)}{2}$$

따라서

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\frac{t^2 - 1}{2}}{\frac{t^2(t - 1)}{2}} \\ = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{(t+1)(t-1)}{t^2(t-1)} \\ = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t+1}{t^2} \\ = \frac{1+1}{1^2} = 2$$

[정답] ①

$$f(x) = (x-1)(x+1)(ax+m) \quad (a > 0)$$

이라 놓을 수 있다.

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} \right) \left(\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(ax+m)}{x-1} \\
&\quad \times \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(ax+m)}{x+1} \\
&= 4(a^2 - m^2)
\end{aligned}$$

따라서

$$4(a^2 - m^2) = 240 \text{ 에서 } a^2 - m^2 = 60$$

또, $f'(x) = 3ax^2 + 2mx - a$ 이므로

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}m - a = 0$$

그러므로 $a + 4m = 0$

따라서 $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 8x + 2$ 이므로

$a = 8, b = -2, c = -8, d = 2$ 이다.

그러므로 $\frac{cd}{ab} = 1$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 1

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+x} - \frac{1+ax}{1+bx} \\
&= \frac{(1+bx)\sqrt{1+x} - (1+ax)}{1+bx} \\
&= \frac{(1+bx)^2(1+x) - (1+ax)^2}{(1+bx)\{(1+bx)\sqrt{1+x} + (1+ax)\}} \\
&\text{분자가 } b^2x^3 \text{ 만 남고, } x, x^2 \text{ 의 계수가 모두 } \\
&0 \text{ 이어야 한다.}
\end{aligned}$$

따라서

$$2b - 2a + 1 = 0, b^2 + 2b - a^2 = 0$$

이므로 $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $a + b = 1$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

$x - 1 = t$ 로 놓으면

$x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1) + g(x)}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \left\{ \frac{f(x-1) + g(x)}{x-1} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+2} \left\{ \frac{f(t)}{t} + \frac{g(1+t) - g(1)}{t} \right\} \\
&= \frac{1}{2}(2 + g'(1)) = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

04. 함수의 연속

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x = a, x = b$ 에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow a+} (2x - 3) = 2a - 3$$

$$a^2 - 3a + 1 = 2a - 3$$

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$(a-1)(a-4) = 0$$

$$a = 1 \text{ 또는 } a = 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x = b$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b+} f(x) = f(b)$$

$$\lim_{x \rightarrow b-} (2x - 3) = \lim_{x \rightarrow b+} (x^2 - 3x + 1) = 2b - 3$$

$$2b - 3 = b^2 - 3b + 1$$

$$b^2 - 5b + 4 = 0$$

$$(b-1)(b-4) = 0$$

$$b = 1 \text{ 또는 } b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $a < b$ 이므로 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서

$$a = 1, b = 4$$

따라서 $a + b = 1 + 4 = 5$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + a}{x^{2n+2} + 1} \text{ 에서}$$

(i) $x > 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = \infty \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{a}{x^{2n+2}}}{1 + \frac{1}{x^{2n+2}}} = \frac{1}{x}$$

(ii) $0 < x < 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + a}{x^{2n+2} + 1} = a$$

(iii) $x = 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = 1 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + a}{x^{2n+2} + 1} = \frac{1+a}{2}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} a = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = 1,$$

$$f(1) = \frac{1+a}{2}$$

이고, 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이 되려면

$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$ 이 성립해야 한다.

$$\text{따라서 } a = 1 = \frac{1+a}{2} \text{ 이므로}$$

$$a = 1$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] 12

$$g(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}),$$

$$h(x) = f(x)g(x) = (x^2 + ax + b)f(x) \text{라 하자.}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$, $x=3$ 에서 불연속이므로 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=3$ 에서 연속이어야 한다.

함수 $h(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow -1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} h(x) = h(-1) \text{이 성립해야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \{(x^2 + ax + b)f(x)\} = (1-a+b) \times 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \{(x^2 + ax + b)f(x)\} = (1-a+b) \times 4$$

$$h(-1) = (1-a+b) \times 2$$

이므로

$$(1-a+b) \times = (1-a+b) \times 4 \text{에서}$$

$$1-a+b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

함수 $h(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 3-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} h(x) = h(3) \text{이 성립해야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} \{(x^2 + ax + b)f(x)\} = (9+3a+b) \times 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \{(x^2 + ax + b)f(x)\} = (9+3a+b) \times 2$$

$$h(3) = (9+3a+b) \times 2$$

이므로

$$(9+3a+b) \times 4 = (9+3a+b) \times 2 \text{에서}$$

$$9+3a+b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -2, \quad b = -3$$

$$\text{따라서 } g(x) = x^2 - 2x - 3 \text{이므로}$$

$$g(5) = 25 - 10 - 3 = 12$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 10

함수 $f(x) = 3x + 2\sqrt{x} + k$ 는 닫힌 구간 $[1, 4]$ 에서 연속이다.

또, 주어진 조건에 의하여 $x > 0$ 에서 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값도 증가하므로 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린 구간 $(1, 4)$ 에서 하나의 실근을 가지려면

$$f(1) = 5 + k < 0, \quad f(4) = 16 + k > 0$$

이어야 한다.

따라서 $-16 < k < -5$ 를 만족시켜야 정수 k 는 $-15, -14, -13, \dots, -6$ 의 10개다.



EBS연계 기출분석 1

[정답] ④

$$\frac{g(x)}{f(x)} = h(x) \text{라고 하자.}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{ax+1}{x^2-4x+6} & (x < 2) \\ ax+1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$h(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이게 된다.

$$h(2) = \lim_{x \rightarrow 2-} h(x) \text{ 이어야 하므로}$$

$$2a+1 = \frac{2a+1}{2} \text{ 이고, } a = -\frac{1}{2} \text{ 이다.}$$



[정답] ③

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x < 0) \\ x^3+1 & (x \geq 0) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2+2 & (x < 0) \\ x+k & (x \geq 0) \end{cases} \text{ 에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1, f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = k, g(0) = k$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + g(x)\} = -1 + 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + g(x)\} = 1 + k$$

$$f(0) + g(0) = 1 + k$$

함수 $f(x) + g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = f(0) + g(0) \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } 1 = 1 + k \text{ 이므로 } k = 0$$



[정답] ④

주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+a}{x-3} = f(3) = b \text{ 이 성립한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2-5x+a) = 9-15+a = 0 \quad \therefore a = 6$$

$$b = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 3-2 = 1 \quad \therefore b = 1$$

따라서 $a+b=7$ 이다.



[정답] ①

(i) $x=0$ 일 때, $f(0)=0$

(ii) $x \neq 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 첫째항이 x

이고, 공비가 $\frac{1}{1+|x|}$ 인 등비급수의 합이다.

이 때 $0 < \frac{1}{1+|x|} < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{x}{1+|x|} + \frac{x}{(1+|x|)^2} + \frac{x}{(1+|x|)^3} + \dots \\ &= \frac{x}{1 - \frac{1}{1+|x|}} = \frac{x(1+|x|)}{|x|} \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

$x < 0$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x(1+|x|)}{|x|} = \frac{x(1-x)}{-x} = x-1$$

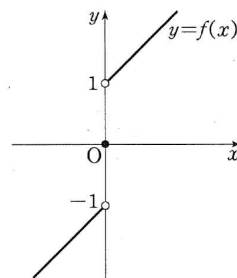
$x > 0$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x(1+|x|)}{|x|} = \frac{x(1+x)}{x} = x+1$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x+1 & (x > 0) \end{cases}$$

이고, 글 그래프는 그림과 같다.



$$\therefore f(1) = 1 + 1 = 2 \quad (\text{참})$$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \\ &= (-1) \times (-1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)\}^2 = 1$ 이다.

한편 $\{f(0)\}^2 = 0^2 = 0$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)\}^2 \neq \{f(0)\}^2$ 이므로

함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

i) $x > 2$ 일 때 : $\left| \frac{x-3}{x-1} \right| < 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-3) \left(\frac{x-3}{x-1} \right)^{2n} + (x-1)}{\left(\frac{x-3}{x-1} \right)^{2n} + 1}$$

$$= x-1$$

ii) $x = 2$ 일 때 : $f(2) = 0$

iii) $x < 2$ 일 때 : $\left| \frac{x-1}{x-3} \right| < 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-3) + (x-1) \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^{2n}}{1 + \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^{2n}}$$

$$= x-3$$

따라서 $x=2$ 에서 불연속이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

$\frac{1}{10} < x \leq \frac{1}{9}$ 이면 $9 \leq \frac{1}{x} < 10$ 이므로

$f(x) = 9$,

$\frac{1}{9} < x \leq \frac{1}{8}$ 이면 $8 \leq \frac{1}{x} < 9$ 이므로

$f(x) = 8$,

...

$\frac{1}{2} < x \leq 1$ 이면 $1 \leq \frac{1}{x} < 2$ 이므로

$f(x) = 0$

따라서 불연속점은

$x = \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}, 1$ 이 되어 9 개가 된다.

III. 다항함수의 미분법

05. 미분계수와 도함수

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

(i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3} = 5$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일

때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-g(x)\} = 0$ 에서 $f(3) = g(3)$

조건 (나)에서 $f(3) = g(3) = 4$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)-g(x)+g(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

$$= f'(3) - g'(3)$$

조건 (가)에서 $f'(3) - g'(3) = 5$ 이므로

$f'(3) = g'(3) + 5 = 2 + 5 = 7$

(i), (ii)에 의하여

$f(3) + f'(3) = 4 + 7 = 11$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = -1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분

모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-1\} = 0$ 에서 $f(1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

이므로 $f(1) = -1$

또 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x-1} = -2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-2\} = 0$ 에서 $g(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1)$$

이므로 $g'(1) = -2$

따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xg(1)-g(x)}{xf(1)-f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xg(1)-g(1)+g(1)-g(x)}{xf(1)-f(1)+f(1)-f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)g(1)-\{g(x)-g(1)\}}{(x-1)f(1)-\{f(x)-f(1)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(1)-\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}{f(1)-\frac{f(x)-f(1)}{x-1}} \\ &= \frac{g(1)-\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}}{f(1)-\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}} \\ &= \frac{g(1)-g'(1)}{f(1)-f'(1)} \\ &= \frac{2-(-2)}{1-(-1)} \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

함수 $f(x) = \begin{cases} a(6x-x^2) & (x < 2) \\ x^3-bx & (x \geq 2) \end{cases}$ 가

$x=2$ 에서 미분가능하면 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$ 가 성립해야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} a(6x-x^2) = 8a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^3-bx) = 8-2b$$

$f(2) = 8-2b$ 이므로 $8a = 8-2b$

즉, $4a+b=4$ ㉠

한편, 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

가 성립해야 한다.

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a\{6(2+h)-(2+h)^2\}-(8-2b)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a(8+2h-h^2)-8a}{h} \quad (\text{㉠에 의해})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} a(2-h) = 2a$$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{(2+h)^3-b(2+h)\}-(8-2b)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{12h+6h^2+h^3-bh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (12+6+h^2-b) = 12-b$$

이므로 $2a = 12-b$

즉, $2a+b=12$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=20$

따라서 $f(3) = 3^3 - 20 \times 3 = -33$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+2}{x+2} = 4 \text{에서 } x \rightarrow -2 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -2} \{f(x)+2\} = 0$ 에서 $f(-2) = -2$

또 함수 $f(x)$ 는 미분가능한 함수이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+2}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \\ &= 4 \times 1 + (-2) \times 2 = 0 \end{aligned}$$

$$g(x) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2x + 6 \text{ 이므로} \\
 g(-2) &= 1, \quad g'(-2) = 2 \\
 \text{따라서 } h(x) &= f(x)g(x) \text{ 에서} \\
 h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ 이므로} \\
 h'(-2) &= f'(-2)g(-2) + f(-2)g'(-2) \\
 &= 4 \times 1 + (-2) \times 2 = 0
 \end{aligned}$$



[정답] 24

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \text{ 이므로 } f'(2) = 24 \text{ 이다.}$$



[정답] 15

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 2x^2 + 3 \text{ 에서 } f'(x) = 3x^2 - 4x \\
 \text{이므로 } f'(3) &= 3 \times 3^2 - 4 \times 3 = 15
 \end{aligned}$$



[정답] ⑤

함수 $f(x)$ 가 실수 전체집합에서 미분가능하면 함수 $f(x)$ 는 실수 전체집합에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)$ 가 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow -2-} (x^2 + ax + b) = 4 - 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} (2x) = -4$$

$$\text{즉, } 4 - 2a + b = -4 \quad \therefore 2a - b = 8 \quad \cdots \text{ ㉠}$$

또한 $f(x)$ 가 실수 전체집합에서 미분가능하므로 $\lim_{x \rightarrow -2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f'(x)$ 가 성립한다.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow -2-} f'(x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x^2 + ax + b - (4 - 2a + b)}{x + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{(x^2 - 4) + a(x + 2)}{x + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2-} (x - 2) + a = a - 4 \\
 &\lim_{x \rightarrow -2+} f'(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2x - (4 - 2a + b)}{x + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2x - (4 - 8)}{x + 2} \quad (\because \text{㉠}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2x + 4}{x + 2} = 2
 \end{aligned}$$

즉, $2 = a - 4$ 에서 $a = 6$ 이다.

㉠에 $a = 6$ 을 대입하면 $b = 4$ 이다.

따라서 $a + b = 10$ 이다.

[다른 풀이]

$f(x)$ 는 실수 전체에서 미분가능하므로 $x = -2$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (2x) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (x^2 + ax + b)$$

$$= 4 - 2a + b$$

$$-4 = 4 - 2a + b \quad \therefore 2a - b = 8$$

또한

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & (x < -2) \\ 2 & (x > -2) \end{cases}$$

이고, $f'(-2)$ 가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (2x + a) = -4 + a$$

$$2 = -4 + a \quad \therefore a = 6, \quad b = 4$$

따라서 $a + b = 10$ 이다.



[정답] 15

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 $x = 2$ 에서 미분가능하다.

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2)$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 + ax - 1) &= \lim_{x \rightarrow 2+} (bx^2 + 12x - 11) \\
 &= 4b + 13
 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } 3 + 2a = 4b + 13$$

$$\text{즉, } a - 2b = 5 \quad \cdots \cdots \text{ ㉠}$$

(ii) 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능하고 ㉠에서 $a - 2b = 5$ 이므로

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 + ax - 1) - (4b + 13)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + (2b + 5)x - 2(2b + 7)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2b + 7)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2b + 7) = 2b + 9 \\
& \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{bx^2 + 12x - 11 - (4b + 13)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{bx^2 + 12x - 2(2b + 12)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(bx + 2b + 12)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx + 2b + 12) = 4b + 12
\end{aligned}$$

에서 $2b + 9 = 4b + 12$, 즉 $b = -\frac{3}{2}$

㉠에서 $a = 2b + 5 = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 5 = 2$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & (x < 2) \\ -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 11 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이므로 $f(1) + f(4) = 2 + 13 = 15$

EBS연계 기출분석 3

[정답] ③

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 1$$

$$f'(x) = x^2 - 2kx = x(x - 2k) = 0$$

x	...	0	...	$2k$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f(x)$ 의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m 의 기울기가 모두 $3k^2$ 이므로 두 점 A, B의 x 좌표를 구하면,

$$f'(x) = x^2 - 2kx = 3k^2 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2kx - 3k^2 = 0$$

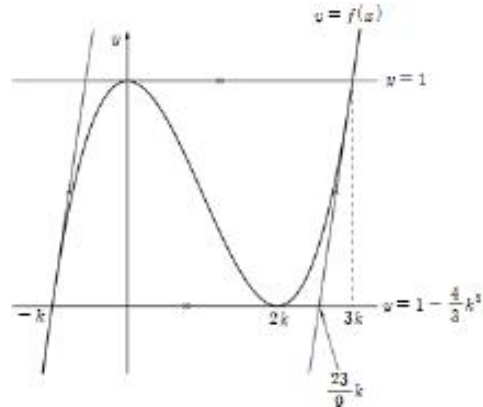
$$(x - 3k)(x + k) = 0$$

$x = 3k$ 또는 $x = -k$ 이다.

$$f(0) = f(3k) = 1,$$

$$f(-k) = f(2k) = 1 - \frac{4}{3}k^3$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하고 x 축에 평행한 두 직선과 접선 l, m 으로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같이 평행사변형이다.



점 $(3k, f(3k)) = (3k, 1)$ 에서의 접선을 구하면

$$y - 1 = 3k^2(x - 3k)$$

$$y = 3k^2x - 9k^3 + 1 \text{ 이다.}$$

$$y = 3k^2x - 9k^3 + 1 \text{ 과 직선 } y = 1 - \frac{4}{3}k^3 \text{ 이}$$

만나는 점의 x 좌표를 구하면,

$$1 - \frac{4}{3}k^3 = 3k^2x - 9k^3 + 1$$

$$23k^3 - 9k^2x = k^2(23k - 9x) = 0$$

$$k > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{23}{9}k \text{ 이다.}$$

따라서 평행사변형의 밑변의 길이는

$$\frac{23}{9}k - (-k) = \frac{32}{9}k \text{ 이고,}$$

$$\text{높이는 } 1 - \left(1 - \frac{4}{3}k^3\right) = \frac{4}{3}k^3 \text{ 이다.}$$

평행사변형의 넓이가 24이므로

$$\frac{32}{9}k \times \frac{4}{3}k^3 = 24$$

$$k^4 = \frac{81}{16} \quad \therefore k = \frac{3}{2}$$

EBS교재

[정답] 29

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $T(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=t$ 에서의 미분계수 $f'(t)$ 와 같으므로

$$\begin{aligned} 3t^2 - 6t &= 9, \quad 3t^2 - 6t - 9 = 0 \\ 3(t^2 - 2t - 3) &= 0, \quad 3(t+1)(t-3) = 0 \\ t &= -1 \text{ 또는 } t = 3 \\ \text{따라서 } a &= -1, \quad b = 3 \text{ 이므로} \\ a + 10b &= -1 + 10 \times 3 = 29 \end{aligned}$$

EBS연계 기출분석 4

[정답] 35

$$\begin{aligned} f'(x) &= 25x^4 + 9x^2 + 1 \\ f'(1) &= 25 + 9 + 1 = 35 \end{aligned}$$

EBS교재

[정답] 55

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 \text{ 이므로} \\ f'(1) &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 15

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \times (x^2+x+1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times (x^2+x+1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1) \\ &= f'(1) \times 3 \\ &= 5 \times 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

조건 ㉞의 등식에 $x=2$ 를 대입하면 $f(4)=0$

$$\text{또 } x \neq 2 \text{ 일 때, } g(x) = \frac{f(x^2)}{x-2}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이고 $f'(4)=1$ 이므로,

$$\begin{aligned} g(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x^2) - f(4)}{(x-2)(x+2)} \times (x+2) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ &= f'(4) \times 4 \\ &= 1 \times 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] $\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{3h} \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \\ &= -\frac{1}{3} f'(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 + 5x \text{ 에서} \\ f'(x) &= 3x^2 - 4x + 5 \text{ 이므로} \\ -\frac{1}{3} f'(a) &= -\frac{1}{3} \times (3a^2 - 4a + 5) = -3 \\ \text{즉, } 3a^2 - 4a + 5 &= 9 \text{ 이므로} \\ 3a^2 - 4a - 4 &= 0 \\ \therefore a &= -\frac{2}{3} \text{ 또는 } a = 2 \end{aligned}$$

따라서 구하고자 하는 값은 $-\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ③

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 + kx)(x^2 - x + 1) \text{ 에 대하여} \\ f(2) &= 18 \text{ 이므로} \\ f(2) &= (8 + 2k)(4 - 2 + 1) = 24 + 6k = 18 \\ \text{그러므로 } 6k &= -6 \text{ 에서 } k = -1 \\ \text{즉, } f(x) &= (x^3 - x)(x^2 - x + 1) \text{ 이고} \end{aligned}$$

$f'(x) = (3x^2 - 1)(x^2 - x + 1) + (x^3 - x)(2x - 1)$
 이므로
 $f'(k) = f'(-1)$
 $= (3 - 1)(1 + 1 + 1) + (-1 + 1)(2 - 1)$
 $= 6 + 0$
 $= 6$
 따라서 $f'(k) = 6$ 이다.

06. 도함수의 활용(1)

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의
 접선의 방정식이 $y = 2x + 3$ 이고, 직선
 $y = 2x + 3$ 이 점 $(1, 5)$ 를 지나므로
 $f(1) = 5$ 이다.

또한 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에
 서의 접선의 기울기는 $f'(1)$ 이므로
 $f'(1) = 2$ 이다.

$$\begin{aligned}
 g(x) &= xf(x) \text{에서 } g(1) = f(1) = 5 \\
 g'(x) &= f(x) + xf'(x) \text{이므로} \\
 g'(1) &= f(1) + f'(1) = 5 + 2 = 7
 \end{aligned}$$

따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(1, 5)$ 에
 서의 접선의 방정식은 $y - 5 = g'(1)(x - 1)$
 에서 $y - 5 = 7(x - 1)$
 즉, $y = 7x - 2$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

$f(x) = x^3 - 3x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 3$ 이므
 로 $f(3) - f(0) = 3f'(c)$ 에서
 $19 - 1 = 3(3c^2 - 3)$
 $3c^2 - 3 = 6$
 $c^2 = 3$
 $0 < c < 3$ 이므로 $c = \sqrt{3}$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

$f(x) = -2x^3 + (a+2)x^2$ 에서

$$f'(x) = -6x^2 + 2(a+2)x$$

함수 $f(x)$ 가 열린 구간 $(0, 5)$ 에서 증가
 하므로 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

그런데 $f'(x)$ 는 이차항의 계수가 음수인
 이차함수이므로 $f'(0) \geq 0$ 이고 $f'(5) \geq 0$ 이
 면 된다.

$$f'(0) = 0 \text{이고}$$

$$f'(5) = -150 + 10(a+2) \geq 0$$

에서 $a \geq 13$

따라서 구하는 실수 a 의 최솟값은 13 이
 다.

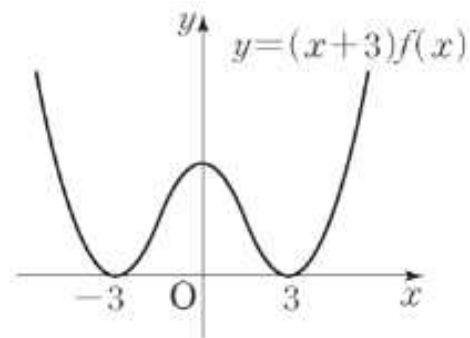
2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ②

$f(3) = 0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계
 수가 1인 삼차함수이므로

$f(x) = (x-3)(x^2 + ax + b)$ (a, b 는 상수)
 라 할 수 있다.

모든 실수 x 에 대하여 $(x+3)f(x) \geq 0$ 이
 어야 하므로 $y = (x+3)f(x)$ 의 그래프의 개
 형이 그림과 같아야 한다.



즉, $x = -3$, $x = 3$ 이 모두 방정식
 $(x+3)f(x) = 0$ 의 중근이어야 한다.

따라서 $f(x) = (x-3)^2(x+3)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2(x-3)(x+3) + (x-3)^2 \\
 &= (x-3)(3x+3)
 \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 3$ 또는 $x = -1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내
 면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이므로 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-1) = (-1-3)^2(-1+3) = 32$$



[정답] 2

곡선 $y = x^3 - ax + b$ 의 도함수는

$y' = 3x^2 - a$ 이고 $x=1$ 에서의 접선의 기울기는 $3-a$ 이다. 이 접선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$

인 직선과 수직이므로 $3-a=2$ 이다.

따라서 $a=1$ 이다.

한편 곡선 $y = x^3 - ax + b$ 은 $(1, 1)$ 을 지나므로 $1 = 1 - 1 + b$ 이고 정리하면 $b=1$ 이다. 그러므로 $a+b=2$ 이다.



[정답] ④

$f(x) = -3x^3 + 4x + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = -9x^2 + 4 \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = -9 \times 1^2 + 4 = -5$$

기울기가 -5 이고 점 $(1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = -5(x-1) + 2$

$$\text{즉, } y = -5x + 7 \text{ 이다.}$$

따라서 $a = -5$, $b = 7$ 이므로

$$ab = (-5) \times 7 = -35$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

$f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 1$ 이라 하면

$$f(1) = -1 \text{ 이므로 } f(1) = a + b = -1$$

... ①

$f(x)$ 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = 6x - 7$ 이므로 $f'(1) = 6$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1 \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 3a + 2b + 1 = 6$$

$$\text{즉, } 3a + 2b = 5 \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 7$, $b = -8$

$$\text{따라서 } a - b = 7 - (-8) = 15$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

$$f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 = (x+a)(3x-a)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = -a \text{ 또는 } x = \frac{a}{3}$$

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -a$ 에서

극댓값 M 을 갖고, $x = \frac{a}{3}$ 에서 극솟값 m 을

갖는다.

$$M = f(-a) = -a^3 + a^3 + a^3 = a^3$$

$$m = f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^3}{3} = -\frac{5}{27}a^3$$

이므로

$$M - \frac{5}{m} = a^3 - \left(-\frac{27}{a^3}\right) = a^3 + \frac{27}{a^3}$$

$a > 0$ 이므로 산술기하평균에 의해

$$a^3 + \frac{27}{a^3} \geq 2\sqrt{a^3 \times \frac{27}{a^3}} = 2\sqrt{27} = 6\sqrt{3}$$

따라서 $M - \frac{5}{m}$ 의 최솟값은 $6\sqrt{3}$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ③

$$f(x) = -x^3 + ax^2 - (4a - a^2)x + 5 \text{ 에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax - (4a - a^2)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{이때 이차방정식 } f'(x) = 0,$$

즉 $-3x^2 + 2ax - (4a - a^2) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(4a - a^2) \leq 0$$

$$4a^2 - 12a \leq 0$$

$$a(a-3) \leq 0$$

$$0 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 3이다.

2018수능대비 EBS 연계 예상문항 4

[정답] -98

함수 $f(x) = x^3 - 3ax^2 - 3bx$ 가 $x=1$ 에서
극댓값 10을 가지므로

$$f(1) = 10, f'(1) = 0$$

$$f(1) = 1 - 3a - 3b = 10 \text{ 이므로}$$

$$-3a - 3b = 9, \text{ 즉 } a + b = -3 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } f'(x) = 3x^2 - 6ax - 3b \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 3 - 6a - 3b = 0 \text{ 에서 } 6a + 3b = 3$$

$$\text{즉, } 2a + b = 1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 을 연립하여 풀면 } a = 4, b = -7$$

$$\text{그러므로 } f'(x) = 3x^2 - 24x + 21$$

$$= 3(x^2 - 8x + 7)$$

$$= 3(x-1)(x-7)$$

이 되어 $f(x)$ 는 $x=7$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$f(7) = 7 \times 49 - 12 \times 49 + 3 \times 49$$

$$= 49 \times (7 - 12 + 3)$$

$$= 49 \times (-2)$$

$$= -98$$

이므로 $f(x)$ 의 극솟값은 -98이다.

07. 도함수의 활용(2)

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

곡선 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$ 와 직선
 $y = 3x + 2k$ 의 교점의 개수는 방정식
 $x^3 + 2x^2 - x + k = 3x + 2k$ 의 서로 다른 실
근의 개수와 같다.

$$x^3 + 2x^2 - x + k = 3x + 2k \text{ 에서}$$

$$x^3 + 2x^2 - 4x = k \dots\dots \textcircled{1}$$

이고, 방정식 $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 실근의 개
수는 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 4x$ 와 직선 $y = k$

의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x \text{ 라 하면}$$

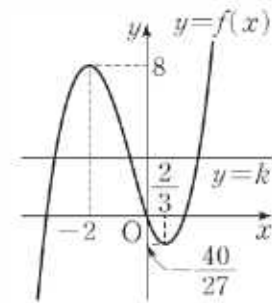
$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = (x+2)(3x-2) \text{ 이}$$

므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = \frac{2}{3}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내
면 다음과 같다.

x	$\dots$	-2	$\dots$	$\frac{2}{3}$	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$-\frac{40}{27}$	$\nearrow$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음
그림과 같다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가
서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수
 k 의 값의 범위는

$$-\frac{40}{27} < k < 8$$

따라서 정수 k 의 값은

-1, 0, 1, 2, 3, $\dots$, 7이고, 그 개수는 9이
다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

$$f(x) = x^3 - 3x + a \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

달한 구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증
가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\dots$	1	$\dots$	3
$f'(x)$		-	0	+	

$f(x)$	$a+2$	$\searrow$	$a-2$	$\nearrow$	$a+18$
--------	-------	------------	-------	------------	--------

따라서 닫힌 구간 $[-1, 3]$ 서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$\begin{aligned} M &= a+18, \text{ 최솟값은 } m = a-2 \text{ 이므로} \\ M \times m &= (a+18)(a-2) = -100 \\ a^2 + 16a + 64 &= 0, (a+8)^2 = 0 \\ \text{즉, } a &= -8 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + a \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(3) = 81 - 108 + a = a - 27$$

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \geq 0$ 이 항상 성립하려면 $a - 27 \geq 0$ 이어야 하므로 $a \geq 27$

따라서 실수 a 의 최솟값은 27이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

점 P의 시각 t 일 때의 위치가 $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2$ 이므로 점 P의 시각 t 일 때의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$v(t) = x'(t) = t^2 - 6t = t(t-6)$$

$$v(t) = 0 \text{ 에서 } t = 0 \text{ 또는 } t = 6$$

이때 $t=6$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 점 P가 수직선 위를 출발하여 처음으로 운동 방향을 바꾸는 순간은 $t=6$ 일 때이다.

따라서 그때의 점 P의 위치는

$$x(6) = \frac{1}{3} \times 6^3 - 3 \times 6^2 = -36$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ④

점 P가 운동 방향이 바뀔 때는 속도가 0일 때이다. 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12 = 0 \quad \therefore t = 2$$

따라서 점 P는 2초일 때 운동 방향을 바꾸며, 그 때의 위치는 원점이다.

$$\text{따라서 } x(2) = 2^3 - 12 \times 2 + k = 0$$

$$\therefore k = 16$$

EBS교재

[정답] ⑤

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치를 각각

$$f(t) = t^3 - 12t, \quad g(t) = 2t^2 - 4t + 1$$

이라 하자. 점 P의 시각 t 에서의 속도를 v_P , 가속도를 a_P 라 하면

$$v_P = f'(t) = 3t^2 - 12, \quad a_P = \frac{dv_P}{dt} = 6t$$

점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 $v_P = 0$ 이므로 $v_P = 3t^2 - 12 = 0$ 에서 $t^2 = 4$
 $t > 0$ 이므로 $t = 2$

$$t = 2 \text{ 일 때 점 P의 가속도는 } 6 \times 2 = 12$$

$$\text{즉, } p = 12$$

점 Q의 시각 t 에서의 속도를 v_Q , 가속도를 a_Q 라 하면

$$v_Q = g'(t) = 4t - 4, \quad a_Q = \frac{dv_Q}{dt} = 4$$

$$t = 2 \text{ 일 때 점 Q의 가속도는 } q = 4$$

$$\text{따라서 } p + q = 12 + 4 = 16$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ①

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + a \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x = -6x(x-1) \text{ 이므로}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		a		$a+1$	

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(0)=a$, 극댓값은 $f(1)=a+1$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 실근을 가지려면 $a(a+1)=0$ 이어야 한다.

그러므로 $a=-1$ 또는 $a=0$ 이다.

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은 -1 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

$f(x)=-x^3+12x-2a$ 에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

단한 구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-2a$		$16-2a$		$-16-2a$

따라서 단한 구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $16-2a$, 최솟값은 $-16-2a$ 이고, 최솟값이 -4 이므로

$-16-2a=-4$ 에서 $a=-6$

따라서 단한 구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $16-2a=16+12=28$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

$f(x) \geq g(x)$ 에서 $f(x)-g(x) \geq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=x^3+2ax^2-3a-(4ax^2-a^2x-12) \\ =x^3-2ax^2+a^2x-3a+12$$

$$h'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{a}{3} \text{ 또는 } x=a$$

이때 a 가 자연수이므로 $x>0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{a}{3}$	...	a	...
$h'(x)$		+	0	-	0	+
$h(x)$			극대		극소	

구간 $(0, 2a)$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 함수 $h(x)$ 의 극솟값인 $h(a)=12-3a$ 이므로, 구간 $(0, 2a)$ 에서 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$12-3a \geq 0$$

$$\text{즉 } a \leq 4$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 4이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] -64

두 점 P, Q의 시각 t 일 때의 위치가 각각

$$f(t)=t^4-8t^3, g(t)=2at \text{이므로}$$

두 점 P, Q의 시각 t 일 때의 속도는 각각

$$f'(t)=4t^3-24t^2, g'(t)=2a \text{이다.}$$

두 점 P, Q의 속도가 서로 같을 때가 단 한 번이기 위해서는 $t>0$ 에서 방정식 $4t^3-24t^2=2a$, 즉 $2t^3-12t^2=a$ 가 단 하나의 실근을 가져야 한다.

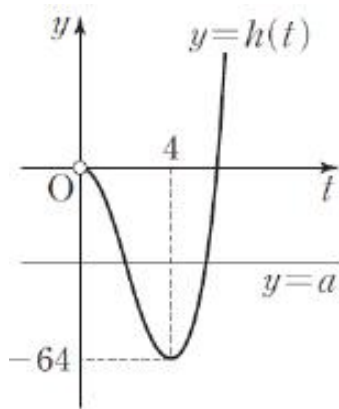
이때 $h(t)=2t^3-12t^2$ 이라 하면

$$h'(t)=6t^2-24t=6t(t-4)$$

$$t>0 \text{이므로 } h'(t)=0 \text{에서 } t=4$$

$t>0$ 에서 함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	4	...
$h'(t)$		-	0	+
$h(t)$			-64	



$t > 0$ 에서 함수 $y = h(t)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 오직 한 점에서 만나려면 $a = -64$ 이거나 $a \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 정수 a 의 최솟값은 -64 이다.

IV. 다항함수의 적분법

08. 부정적분과 정적분

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②

$f'(x) = 2x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C_1$$

(C_1 은 적분상수)

또

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int (x^2 + C_1) dx = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

(C_2 는 적분상수)

조건 (나)에서 $f(0) = F(0)$ 이므로

$$C_1 = C_2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (다)에서 $f(3) = F(3)$ 이므로

$$9 + C_1 = 9 + 3C_1 + C_2$$

$$2C_1 + C_2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $C_1 = C_2 = 0$

따라서

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 \text{이므로 } F(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 = \frac{8}{3}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_2^x (t^2 - 4t + 3) dt$$

$$= x^2 - 4x + 3$$

$$= (x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값 $f(1)$ 을 갖는다.

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_2^1 (t^2 - 4t + 3) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_2^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 6 \right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

따라서

$$a = 1, b = \frac{2}{3} \text{이므로 } a + b = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ④

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+1} dx - \int_0^2 \frac{t^4+t}{t^2+1} dt \\ &= \int_0^2 \frac{x+1}{x^2+1} dx - \int_0^2 \frac{x^4+x}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1-x^4}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^2 \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{x^2+1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 (1-x^2)dx \\
&= \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\
&= 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 10

$f(x)$ 는 이차함수이므로 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

또 조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 4이므로 $f(x)=3(x-1)^2+4$

즉, $f(x)=3x^2-6x+7$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)dx &= 2 \int_0^1 f(x)dx \\
&= 2 \int_0^1 (3x^2-6x+7)dx \\
&= 2 \left[x^3-3x^2+7x \right]_0^1 \\
&= 2(1-3+7)=10
\end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] $\frac{13}{3}$

$f'(x)=x^2-ax+3$ 이므로

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int f'(x)dx \\
&= \int (x^2-ax+3)dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + 3x + C \\
&\quad (C \text{는 적분상수})
\end{aligned}$$

한편, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값을 가지므로 $f'(3)=0$ 에서 $3a=12$

그러므로 $a=4$

즉, $f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

따라서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 극솟값이 3이므로

$f(3)=9-18+9+C=3$ 에서 $C=3$

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+3$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(1)=\frac{1}{3}-2+3+3=\frac{13}{3}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] $-\frac{5}{8}$

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k 는 상수)로 놓으면

$f(x)+x^2 \int_0^1 f(t)dt+x=0$ 에서

$f(x)+kx^2+x=0$ 이므로

$f(x)=-kx^2-x$

$$\begin{aligned}
k &= \int_0^1 f(t)dt \\
&= \int_0^1 (-kt^2-t)dt \\
&= \left[-\frac{k}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 \\
&= -\frac{k}{3} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$k=-\frac{k}{3}-\frac{1}{2}$ 에서 $k=-\frac{3}{8}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{8}x^2-x$ 이므로

$$f(1)=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 6

$\int_0^1 f(t)dt=a$ (a 는 상수)라 하면

$$f(x)=(3x^2+4x)a+6$$

$$\int_0^1 \{(3t^2 + 4t)a + 6\} dt = a$$

$$[at^3 + 2at^2 + 6t]_0^1 = a + 2a + 6 = a$$

$$a = -3$$

따라서 $f(x) = -9x^2 - 12x + 6$ 이므로

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (-9x^2 - 12x + 6) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (-9x^2 + 6) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (-9x^2 + 6) dx$$

$$= 2 [-3x^3 + 6x]_0^1$$

$$= 2(-3 + 6) = 6$$

2018수능대비 EBS 연계 예상문항 4

[정답] ②

$$\int_{-3}^3 (ax^3 + ax^2 + ax) dx$$

$$= \int_{-3}^3 ax^2 dx$$

$$= 2a \int_0^3 x^2 dx$$

$$= 2a \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3$$

$$= 18a$$

$$18a = 36 \text{ 에서 } a = 2$$

09. 정적분의 활용

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

$$f(x) = x^3(x-1) \text{ 이라 하면}$$

$$f(x) = x^4 - x^3 \text{ 에서}$$

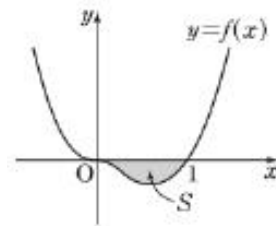
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{3}{4}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{3}{4}$	$\dots$
$f'(x)$	-	0	-	0	=
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - x^4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = mx$ 가 만나는 점의 x 좌표는 $-1, 0, 1$ 이다.

구하는 넓이를 S 라 하면

$$\frac{1}{2}S = \int_0^1 \{f(x) - mx\} dx$$

$$= \int_0^1 \{-x(x+1)(x-1)\} dx$$

$$= \int_0^1 (-x^3 + x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } S = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

$$x^2 - x = mx \text{에서 } x(x - m - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = m + 1$$

이때 함수 $y = |x^2 - x|$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ ($m > 0$)으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{m+1} (|x^2 - x| - mx) dx = 0$$

$$\text{즉, } \int_0^{m+1} |x^2 - x| dx = \int_0^{m+1} mx dx$$

$$\int_0^{m+1} |x^2 - x| dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \int_1^{m+1} (x^2 - x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^{m+1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left\{ \frac{1}{3}(m+1)^3 - \frac{1}{2}(m+1)^2 \right\} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{3}(m+1)^3 - \frac{1}{2}(m+1)^2 + \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{m+1} mx dx = \left[\frac{1}{2}mx^2 \right]_0^{m+1} = \frac{1}{2}m(m+1)^2$$

$$\frac{1}{3}(m+1)^3 - \frac{1}{2}(m+1)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}m(m+1)^2$$

에서

$$(m+1)^2 \left(\frac{m+1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{m}{2} \right) = -\frac{1}{3}$$

$$(m+1)^3 = 2$$

$$m+1 = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{따라서 } m = \sqrt[3]{2} - 1$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

$t = 3$ 일 때 다시 원점을 지나므로 $t = 3$ 일 때의 위치가 0이다.

$$\int_0^3 (-t^2 + at) dt = 0$$

$$\left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 \right]_0^3 = -9 + \frac{a}{2} \times 9 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 $t = 0$ 에서 $t = 2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |-t^2 + 2t| dt = \int_0^2 (-t^2 + 2t) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_0^2$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ①

$t = 0$ 에서 $t = 4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v(t)| dt = \int_0^2 (-2t + 4) dt + \int_2^4 (2t - 4) dt$$

$$= 4 + 4 = 8$$

이다.

EBS교재

[정답] ④

$v(t) = 3t^2 - 2t = 0$ 에서 $t(3t - 2) = 0$ 이므로 $t = 0$ 또는 $t = \frac{2}{3}$

즉, 출발 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t = \frac{2}{3}$ 일 때이므로 출발 후 점 P가 운동방향이 바뀌는 순간까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{2}{3}} |v(t)| dt = \int_0^{\frac{2}{3}} |3t^2 - 2t| dt$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}} (-3t^2 + 2t) dt = \left[-t^3 + t^2 \right]_0^{\frac{2}{3}}$$

$$= -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

구하는 넓이를 S라 하면

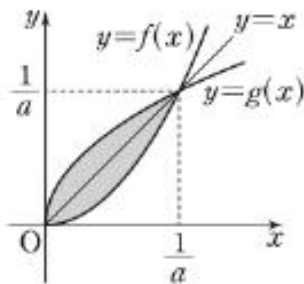
$$\begin{aligned}
 S &= 2 \times 8 - \int_0^2 x^3 dx \\
 &= 16 - \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 \\
 &= 16 - \frac{1}{4} \times 16 = 16 - 4 = 12
 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표와 같다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는 $ax^2=x$ 에서 $x(ax-1)=0$ 이므로 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{a}$



직선 $y=x$ 와 곡선 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{6}$ 이고 이 넓이는 직선 $y=x$ 와 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{6} &= \int_0^{\frac{1}{a}} (x - ax^2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{a}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{a}} \\
 &= \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{3a^2} \\
 &= \frac{1}{6a^2} \\
 6a^2 &= 6 \text{에서}
 \end{aligned}$$

$$a^2 = 1$$

$$\text{즉, } a = -1 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } a = 1$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 9

$t=2$ 일 때, 점 P의 위치는

$$\int_0^2 at dt = \left[\frac{a}{2} t^2 \right]_0^2 = 2a$$

$t=2$ 일 때, 점 Q의 위치는

$$\int_0^2 (3t^2 - 2t) dt = \left[t^3 - t^2 \right]_0^2 = 4$$

$t=2$ 일 때, 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만나므로 $2a=4$ 에서 $a=2$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 위치는 t^2 이고 점 Q의 위치는 $t^3 - t^2$ 이다.

$t=1$ 일 때, 점 P의 위치는 $3^2=9$ 이고 점 Q의 위치는 $3^3 - 3^2=18$ 이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 9이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 4

$$\begin{aligned}
 &\int_0^5 (-t^3 + 4) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{4} t^4 + 4t \right]_0^5 \\
 &= -\frac{1}{4} \times 16 + 4 \times 2 \\
 &= -4 + 8 = 4
 \end{aligned}$$

V. 집합과 명제

10. 집합

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] 3

집합 A 에서 $x^2 - (a-1)x + 2a-6 = 0$,
즉, $\{x - (a-3)\}(x-2) = 0$ 의 해는

$x = a-3$ 또는 $x = 2$

따라서 $A = \{a-3, 2\}$

$A \subset B$ 를 만족시키려면 $2 \in A$ 에서 $2 \in B$
이어야 하므로

$a+2=2$ 또는 $a^2-7=2$

즉, $a=0$ 또는 $a=\pm 3$

(i) $a=0$ 일 때, 두 집합 A, B 는
 $A = \{-3, 2\}$, $B = \{-7, 0, 2\}$ 이므로
 $A \not\subset B$

(ii) $a=3$ 일 때, 두 집합 A, B 는
 $A = \{0, 2\}$, $B = \{0, 2, 5\}$ 이므로 $A \subset B$

(iii) $a=-3$ 일 때, 두 집합 A, B 는
 $A = \{-6, 2\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$ 이므로
 $A \not\subset B$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $A \subset B$ 를 만족시키는
실수 a 의 값은 3이다.

[다른 풀이]

A 의 원소 $a-3$ 이 B 의 원소가 되어야 하
므로

(i) $a-3 = a+2$ 인 경우는 성립하지 않는다.

(ii) $a-3 = 0$ 일 때, $a=3$ 이고 $A \subset B$ 를
만족시킨다.

(iii) $a-3 = a^2-7$ 인 경우는 $A \not\subset B$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

조건 (가)에서 $\{1, 2, 3\} \cap A \neq \emptyset$ 이므로
집합 A 는 1, 2, 3

중 적어도 하나의 원소를 포함한다.

조건 (나)에서 $\{4, 5\} \cap A = \emptyset$ 이므로 집합
 A 는 4, 5를 포함

하지 않는다.

따라서 구하는 집합 A 의 개수는 집합
 $\{1, 2, 3, 6\}$ 의 부분

집합 전체에서 1, 2, 3을 모두 원소로 갖지
않는 부분집합을

제외하면 되므로

$$2^4 - 2^1 = 16 - 2 = 14$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

$$\begin{aligned} A \cap \{(A \cap B) \cup (B - A)\} \\ &= A \cap \{(A \cap B) \cup (B \cap A^c)\} \\ &= A \cap \{B \cap (A \cup A^c)\} \\ &= A \cap (B \cap U) \\ &= A \cap B = \{e\} \end{aligned}$$

따라서 집합 B 는 U 의 부분집합 중 e 를 원
소로 갖고, b, f 는 원소로 갖지 않는 집합
이므로 집합 B 의 개수는

$$2^{6-1-2} = 2^3 = 8$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

스포츠클럽 100명의 회원 전체의 집합을
 U , 축구 회원의 집합을 A , 농구 회원의 집
합을 B 라 하면

$$n(U) = 100, n(A) = 72, n(B) = 51$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$n(A \cup B)$ 가 최소일 때 $n(A \cap B)$ 가 최대이
고, $n(A \cup B)$ 가 최대일 때 $n(A \cap B)$ 가 최소
이다.

$$n(A \cap B) = x \text{이므로}$$

$$n(A) + n(B) - n(U) \leq n(A \cap B)$$

$$\leq (n(A) \text{와 } n(B) \text{ 중 작은 수})$$

$$\text{에서 } 72 + 51 - 100 \leq x \leq 51$$

$$23 \leq x \leq 51$$

따라서 구하는 x 의 최댓값과 최솟값의 합
은 $51 + 23 = 74$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

$$\begin{aligned} S &= (A - C) \cap (B - C) \\ &= (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c) \\ &= (A \cap B) \cap C^c \\ &= A \cap B \cap C^c \\ &= (A \cap C^c) \cap B \end{aligned}$$

이때

$$A = \{x|x \text{는 짝수}\}$$

$$B = \{x|x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$$

$$C = \{x|x \text{는 } 2(2n-1), n=1, 2, 3, \dots, 13\}$$

$$= \{x|x \text{는 } 4 \text{로 나눈 나머지가 } 2 \text{인 자연수}\}$$

$$C^c = \{x|x \text{는 } 4 \text{로 나눈 나머지가 } 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 또는 } 3 \text{인 자연수}\}$$

$$A \cap C^c = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$$

$$(A \cap C^c) \cap B = \{x|x \text{는 } 100 \text{ 이하의 } 12 \text{의 배수}\}$$

따라서

$$n(S) = n\{x|x \text{는 } 100 \text{ 이하의 } 12 \text{의 배수}\} = 8$$

[다른 풀이]

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, \dots, 96, 98, 100\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \dots, 90, 93, 96, 99\}$$

$$C = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, \dots, 90, 94, 98\}$$

이므로

$$A - C = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots, 96, 100\}$$

$$B - C = \{3, 9, 12, 15, 21, 24, \dots, 93, 96, 99\}$$

$$(A \cap B) - C = \{12, 24, 36, \dots, 96\}$$

$$= \{x|x \text{는 } 100 \text{ 이하의 } 12 \text{의 배수}\}$$

따라서 $S = \{x|x \text{는 } 100 \text{ 이하의 } 12 \text{의 배수}\}$

이므로 $n(S) = 8$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

$$A \cup B = A \text{ 이면 } B \subset A \text{이다.}$$

이차방정식 $x^2 - ax - a = 0$ 의 판별식 D 가

$$D = a^2 + 4a < 0 \text{ 이면,}$$

즉, $-4 < a < 0$ 이면 $A = \emptyset$ 이므로 $B \subset A$ 가 성립한다.

또한 이차방정식 $x^2 - ax - a = 0$ 에 대해 $x = -2$ 이면 $a = -4$ 이 되어 $B \subset A$ 가 성립

한다. 마찬가지로 방법으로 $x = 2$ 이면 $a = \frac{4}{3}$

이 되어 $B \subset A$ 이다. 따라서 $B \subset A$ 가 되는 정수 a 를 모두 구하면 $-4, -3, -2, -1$ 이고 이를 모두 더하면 -10 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

이 고등학교 2학년 학생 전체의 집합을 U , 스포츠 관련 동아리를 신청한 학생의 집합을 A , 학술 관련 동아리를 신청한 학생의 집합을 B , 예술 관련 동아리를 신청한 학생의 집합을 C 라 하자.

$$n(U) = a \text{라 하면}$$

$$n(A) = \frac{3}{4}a, n(B) = \frac{5}{12}a, n(C) = \frac{3}{32}a$$

이고 $n((A \cup B \cup C)^c) = 11, n(A \cap B) = \frac{3}{8}a$

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{3}{4}a + \frac{5}{12}a + \frac{3}{32}a - \frac{3}{8}a \\ &= \frac{85}{96}a \end{aligned}$$

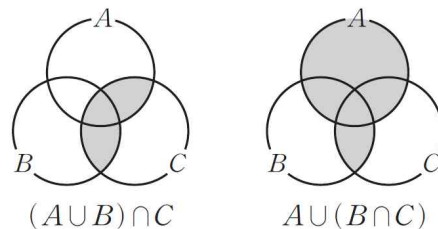
$$\begin{aligned} n((A \cup B \cup C)^c) &= n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= a - \frac{85}{96}a \\ &= \frac{11}{96}a = 11 \end{aligned}$$

에서 $a = 96$ 이다. 따라서 학술 관련 동아리를 신청한 학생의 수는 $\frac{5}{12}a = 40$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 7

먼저 $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ 에서 두 집합 $(A \cup B) \cap C, A \cup (B \cap C)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



주어진 조건에 의하여 위의 두 그림에서 색칠한 부분의 집합이 서로 같아야 하므로

$A - C = \emptyset$ 이어야 한다.

따라서 $A \subset C$ 이다.

또한 $(B - C) \cup (B \cap C) \cup C = C$ 도 만족
해야 하므로

$$\begin{aligned}(B - C) \cup (B \cap C) \cup C &= \{(B \cap C^c) \cup (B \cap C)\} \cup C \\ &= \{B \cap (C^c \cup C)\} \cup C \\ &= (B \cap U) \cup C \\ &= B \cup C = C\end{aligned}$$

즉, $B \cup C = C$ 이므로 $B \subset C$ 이다.

집합 B 에서

$x^2 - 3x - 4 \leq 0$, $(x+1)(x-4) \leq 0$ 이 되어
 $-1 \leq x \leq 4$ 이다. 이때 x 는 정수이므로

$$x = -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

즉, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

집합 C 에서

$|x-1| < k$, $-k < x-1 < k$ 이 되어
 $-k+1 < x < k+1$ 이다. 이때 x 는 정수이므
로 $x = -k+2, -k+3, \dots, k$

즉, $C = \{-k+2, -k+3, \dots, k\}$

한편, $A = \{-5, -3, -1, 1\}$ 이고

$A \subset C$, $B \subset C$ 가 성립

하려면 $-k+2 \leq -5$ 이고 $k \geq 4$ 이어야 하므
로 $k \geq 7$

따라서 양의 정수 k 의 최솟값은 7 이다.



[정답] ③

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ 이므로
 $n(A \cup B) = 8$ 이다.



[정답] ④

$A = \{1, 2\}$ 에서 $A^c = \{3, 4, 5\}$ 이므로
 $A^c \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 $A^c \cup B$ 의 원소의 개수는 4 이
다.



[정답] 7

$A \cap B^c = A - B = \{6, 7\}$ 이므로 3은 집합 B
의 원소이다. 따라서 $a - 4 = 3$ 이므로 $a = 7$ 이다.



[정답] 9

$A \cap B = \{3, 6\}$ 이므로 $6 \in A$ 이어야 한다.

즉, $a^2 + a = 6$ 이어야 하므로

$$a^2 + a - 6 = 0, (a+3)(a-2) = 0$$

따라서 $a = -3$ 또는 $a = 2$

이때 $a = -3$ 이면 $B = \{2, -2, b-1\}$ 이므
로 $A \cap B = \{3, 6\}$ 일 수 없다.

따라서 $a = 2$

이때 $B = \{2, 3, b-1\}$ 이므로

$A \cap B = \{3, 6\}$ 이려면 $b-1 = 6$ 이어야 한
다. 즉, $b = 7$

따라서 $a + b = 2 + 7 = 9$



[정답] ④

$A \cup B = \{1, 2, 4\}$ 따라서 $1 + 2 + 4 = 7$



[정답] ④

$B - A = \{x \mid x \in B \text{ 이고 } x \notin A\}$ 이므로

$$B - A = \{6, 7\}$$

따라서 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합은
 $6 + 7 = 13$



[정답] 8

집합 A 는 원소 1, 2, 3을 가지지 않는 전
체집합 U 의 부분집합이므로 가능한 집합
 A 의 개수는 $2^6 - 3 = 2^3 = 8$ 이다.



[정답] ④

$A \cup C = B \cup C$ 에서 $A \subset (B \cup C)$ 이고
 $B \subset (A \cup C)$

(i) $A \subset (B \cup C)$ 에서

$2 \notin B, 4 \notin B, 8 \notin B$ 이고
 $2 \in A, 4 \in A, 8 \in A$ 이므로
 $2 \in C, 4 \in C, 8 \in C$

(ii) $B \subset (A \cup C)$ 에서

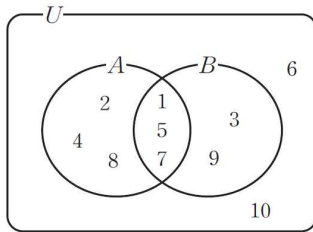
$3 \notin A, 9 \notin A$ 이고 $3 \in B, 9 \in B$ 이므로
 $3 \in C, 9 \in C$

(i), (ii)에서 집합 C 는 2, 3, 4, 8, 9를 반드시 원소로 갖는다.

따라서 집합 C 는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 원소 2, 3, 4, 8, 9를 모두 포함하는 집합이므로 집합 $\{1, 5, 6, 7, 10\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 집합 C 의 개수는 $2^5 = 32$

[참고]



11. 명제

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

조건 $p : 2x - 1 \geq 7$ 에서

$2x \geq 8$, 즉 $x \geq 4$ 이므로

$P = \{x | x \geq 4\}, P^C = \{x | x < 4\}$

조건 $q : |x - 1| < 3$ 에서

$-3 < x - 1 < 3$, 즉 $-2 < x < 4$ 이므로

$Q = \{x | -2 < x < 4\}$

따라서 $Q \subset P^C$ 이므로 명제 $q \rightarrow \sim p$ 는 항상 참이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$\sim p \rightarrow q$ 이므로 $\sim q \rightarrow p$

$r \rightarrow \sim p$ 이므로 $p \rightarrow \sim r$

따라서 $\sim q \rightarrow \sim r$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

(가) 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이므로 $x + y\sqrt{3} = 0$ 이다.

그러나 $x = \sqrt{3}, y = -1$ 이면 $x + y\sqrt{3} = 0$ 이지만 $x^2 + y^2 \neq 0$ 이다.

따라서 $x^2 + y^2 = 0$ 은 $x + y\sqrt{3} = 0$ 이기 위한 충분조건이다.

(나) $x^2 - y^2 = 0$ 이면 $x^2 = y^2$ 이므로

$x = y$ 또는 $x = -y$ 이다.

따라서 $x^2 - y^2 = 0$ 은 $x = y$ 이기 위한 필요조건이다.

따라서 (가), (나)의 $\square$ 안에 알맞은 것을 차례로 적은 것은 ③이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

$a = x + y, b = x - y$ ㉠

로 놓으면

$a^2 + ab + b^2 - 3(a + b - 1)$

$= (a + b)^2 - ab - 3(a + b) + 3$

$= (2x)^2 - (x^2 - y^2) - 3 \times 2x + 3$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + y^2$

$= 3(x - 1)^2 + y^2 \geq 0$ ㉡

따라서 부등식 $a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1)$ 이 성립한다.

이때 등호가 성립하는 경우는 부등식 ㉡에서 $x = 1, y = 0$ 일 때이고, 이 값들을 ㉠에 대입하면 $a = 1, b = 1$ 이다.

따라서 $f(x) = 3(x - 1)^2, \alpha = 1, \beta = 1$ 이므로
 $f(3) + \alpha + \beta = 3 \times 2^2 + 1 + 1 = 14$



EBS연계 기술분석 1

[정답] ④

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$ 이다.

한편

$P = \{x \mid |x-1| \leq 3\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$ 이고 $Q = \{x \mid |x| \leq a\} = \{x \mid -a \leq x \leq a\}$ 이므로

$P \subset Q$ 가 되기 위해서는 $a \geq 4$ 이어야 한다. 따라서 자연수 a 의 최솟값은 4이다.



[정답] ③

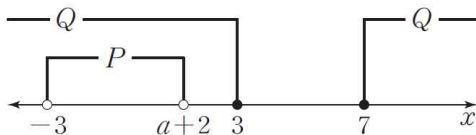
두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{x \mid -3 < x < a+2\}$

$Q = \{x \mid x \leq 3 \text{ 또는 } x \geq 7\}$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 $P \subset Q$ 이므로

$a+2 \leq 3$ 에서 $a \leq 1$



따라서 실수 a 의 최댓값은 1이다.



[정답] ①

조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이 되어야 하므로 $q \rightarrow p$ 가 참이 되어야 한다. 즉, $x^2 + 2x - a = 0$ 에 $x = 3$ 을 대입하면 성립해야 한다. $3^2 + 2 \times 3 - a = 0, 9 + 6 - a = 0$
 $\therefore a = 15$



[정답] ③

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자

p 가 q 이기 위한 필요충분조건이므로

$P = Q$ 이어야 한다.

$p : x = y = 0$ 에서 $P = \{(0, 0)\}$

$q : x^2 + kxy + y^2 = 0$ 에서

$\left(x + \frac{k}{2}y\right)^2 + y^2 - \frac{k^2}{4}y^2 = 0$ 이므로

$\left(x + \frac{k}{2}y\right)^2 + y^2\left(1 - \frac{k^2}{4}\right) = 0$

(i) $1 - \frac{k^2}{4} > 0$, 즉 $k^2 - 4 < 0, -2 < k < 2$

이면 $y^2 = 0, x + \frac{k}{2}y = 0$ 이므로 $y = 0, x = 0$

따라서 $Q = \{(0, 0)\}$

(ii) $1 - \frac{k^2}{4} = 0$ 이면 $y \neq 0$ 이어도 된다.

(iii) $1 - \frac{k^2}{4} < 0$, 즉 $k < -2$ 또는 $k > 2$ 이

면 $\left(x + \frac{k}{2}y\right)^2 = y^2\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)$ 에서

$x + \frac{k}{2}y = |y| \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}$ 이므로

$x = -\frac{k}{2}y + |y| \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}$

따라서 반드시 $x = 0, y = 0$ 인 것은 아니다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 k 의 값의 범위는 $-2 < k < 2$ 이므로 정수 k 는 $-1, 0, 1$ 의 3개다.



[정답] ②

주어진 명제 ' $a \geq \sqrt{3}$ 이면 $a^2 \geq 3$ 이다.'에서 $a^2 \geq 3$ 의 부정은 $a^2 < 3$ 이고,

$a \geq \sqrt{3}$ 의 부정은 $a < \sqrt{3}$ 이므로

주어진 명제의 대우는 ' $a^2 < 3$ 이면 $a < \sqrt{3}$ 이다.'가 된다.



[정답] ④

명제 '평행사변형이면 사다리꼴이다.'의 역은

'사다리꼴이면 평행사변형이다.'㉠

이고, ㉠의 대우는

'평행사변형이 아니면 사다리꼴이 아니다.'이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

조건 $p : (x+1)^2 - a^2 < 0$ 에서

$$(x+1+a)(x+1-a) < 0$$

조건 $q : |x-4| \leq 2$ 에서 $2 \leq x \leq 6$ 이 되어

$$Q = \{x | 2 \leq x \leq 6\} \text{이고}$$

$$Q^c = \{x | x < 2 \text{ 또는 } x > 6\}$$

(i) a 가 양수인 경우

$$-1-a < x < -1+a \text{에서}$$

$$P = \{x | -1-a < x < -1+a\} \text{이고 명제}$$

$p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q^c$ 이어야 하므로 $-1+a \leq 2$ 또는 $-1-a \geq 6$ 이다. 즉, $a \leq 3$ 또는 $a \leq -7$ 이다. 따라서 $0 < a \leq 3$ 이므로 이를 만족하는 정수는 1, 2, 3의 세 개다.

(ii) a 가 음수인 경우

$$-1+a < x < -1-a \text{에서}$$

$$P = \{x | -1+a < x < -1-a\} \text{이고 명제}$$

$p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q^c$ 이어야 하므로 $-1+a \geq 6$ 또는 $-1-a \leq 2$ 이다. 즉, $a \geq 7$ 또는 $a \geq -3$ 이다. 따라서 $-3 \leq a < 0$ 이므로 이를 만족하는 정수는 -3, -2, -1의 세 개다.

(iii) $a=0$ 인 경우

$$-1+a < x < -1-a \text{은 } -1 < x < -1 \text{이므로 } P = \emptyset \text{이고 } \emptyset \subset P \text{이다.}$$

(i), (ii)와 (iii)에 의하여 7개다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

$$p : |xy| = xy \text{에서 } xy \geq 0$$

$$q : (xy)^2 > 0 \text{에서 } xy > 0 \text{ 또는 } xy < 0$$

$$\sim q : xy \leq 0 \text{이고 } xy \geq 0 \text{에서 } xy = 0$$

$$r : x^2 + y^2 = xy \text{에서 } \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$$

$$\text{이므로 } x = y = 0$$

$$\neg. p \rightarrow q \text{는 거짓이다. [반례] } x = 0, y = 1$$

$\neg. \sim q \rightarrow p$ 는 참이다.

$\neg. r \rightarrow \sim q$ 는 참이다.

이상에서 참인 명제는 $\neg, \neg$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 9

$a > 0, b > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b) &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 4 \\ &\geq 5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} \\ &= 5 + 4 = 9 \end{aligned}$$

따라서 최솟값은 9이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ④

$\neg. x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$ 이므로 어

떤 실수 x 에 대하여 $x^2 < 1$ (참)

$\neg. \text{ 모든 자연수 } x \text{에 대하여 } x^2 + 2 > 0 \text{ 이고 } x^2 - 5x + 6 < 0 \text{에서 } (x-2)(x-3) < 0 \text{ 따라서 } 2 < x < 3 \text{을 만족시키는 자연수 } x \text{는 존재하지 않는다. (거짓)}$

$$\begin{aligned} \neg. x^2 - 7x + 13 &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 13 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

이므로 모든 자연수 x 에 대하여

$$x^2 - 7x + 13 \geq 0 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

VI. 함수

12. 함수

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

함수 h 가 항등함수이므로 $h(2)=2$
 조건 (가)에서 $f(0)=g(1)=h(2)=2$
 이때 함수 g 는 상수함수이므로

$$g(1)=g(2)=2$$

또 함수 f 는 일대일 대응이고

$$f(0)=2 \text{이므로}$$

$$f(1)=0, f(2)=1 \text{ 또는 } f(1)=1, f(2)=0$$

(i) $f(1)=0, f(2)=1$ 일 때

$$2f(1)+f(2)=1 \neq 2=f(0)$$

(ii) $f(1)=1, f(2)=0$ 일 때

$$2f(1)+f(2)=2=f(0)$$

(i), (ii)에 의하여 조건 (나)를 만족시키는 것은 $f(1)=1, f(2)=0$

$$\text{따라서 } f(2)+g(2)+h(2)=0+2+2=4$$

{참고}

함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(0)=0$ 이거나 $f(0)=1$ 이면 조건 (나)를 만족시키는 $f(1), f(2)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(0)=2$ 이고, 조건 (나)에 의하여 $f(1)=1, f(2)=0$ 이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & (x < 0) \\ 2x-1 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$\text{이고 } (g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(0) = 1$$

따라서

$$(f \circ g)(1) + (g \circ f)(-1) = 3 + 1 = 4$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

$$f(x) = x^2 + 2x, g(x) = f(x+1) - 3 \text{ 일 때,}$$

$$h = f^{-1} \text{이므로 } h(3) = f^{-1}(3) = k \text{라 하면}$$

$$f(k) = 3 \text{에서 } k^2 + 2k = 3$$

$$k^2 + 2k - 3 = 0, (k+3)(k-1) = 0$$

$$\text{따라서 } k = -3 \text{ 또는 } k = 1$$

함수 f 가 양의 실수 전체의 집합에서 정의되므로 $k = 1$ 이고 $h(3) = 1$

따라서

$$g(h(3)) = g(1) = f(2) - 3 = 8 - 3 = 5$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 8

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 두 점에서 만나면 이 두 점은 직선 $y = x$ 위에 놓이게 된다.

함수 $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$ ($x \geq 1$)의 그래프와

직선 $y = x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1 = x \text{에서}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

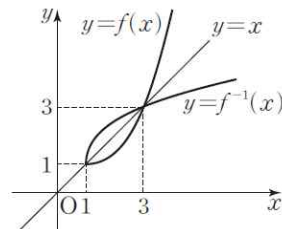
$$x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점의 좌표는 (1, 1), (3, 3)이고 이 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{이므로 } l = 2\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } l^2 = 8$$



EBS연계 기출분석 1

[정답] ⑤

$$f(2) = 4, f^{-1}(2) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(2) + f^{-1}(2) = 4 + 3 = 7 \text{이다.}$$

EBS교재

[정답] ②

$$f(1) = 2 \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 1$$

$$f(3) = 4 \text{이므로 } f^{-1}(4) = 3$$

따라서 $(f \circ f)(1) + f^{-1}(4) = 1 + 3 = 4$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ③

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 6$$

EBS교재

[정답] ⑤

세 함수

$$y = f(x), \quad y = x,$$

$y = g(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같다.

오른쪽 그림에서

$$g(4) = 2 \text{ 이다.}$$

$$f^{-1}(2) = k \text{ 라 하면}$$

$$f(k) = 2 \text{ 이므로 } k = 1$$

$$\text{즉, } f^{-1}(2) = 1, f(3) = 4 \text{ 이므로}$$

$$(f^{-1} \circ g)^{-1}(3)$$

$$= (g^{-1} \circ f)(3)$$

$$= g^{-1}(f(3))$$

$$= g^{-1}(4)$$

$$\text{이때 } g^{-1}(4) = m \text{ 이라 하면 } g(m) = 4 \text{ 이므로 } m = 6$$

$$\text{즉, } (f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = 6$$

따라서

$$g(4) + f^{-1}(2) + (f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = 2 + 1 + 6 = 9$$

EBS연계 기출분석 3

[정답] ④

$$(g^{-1} \circ f)(-1) = g^{-1}(f(-1)) = g^{-1}(0) \text{ 에서 } g^{-1}(0) = a \text{ 라 하자.}$$

역함수의 성질에 의해 $g(a) = 0$ 이 성립하므로 $g(a) = a - 4 = 0$ 이 되어 $a = 4$ 이다.

EBS교재

[정답] 3

$$(f \circ g)(2) = 25 \text{ 이므로}$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = 3g(2) - 2$$

$$= 3(2a + 5) - 2$$

$$= 6a + 13 = 25$$

$$a = 2 \text{ 이므로}$$

$$g(x) = 2x + 5$$

$$(g \circ f)^{-1}(19) = (f^{-1} \circ g^{-1})(19)$$

$$= f^{-1}(g^{-1}(19))$$

$$\text{이때 } g^{-1}(19) = b \text{ 라 하면 } g(b) = 19 \text{ 이므로}$$

$$2b + 5 = 19 \text{ 에서 } b = 7$$

$$\text{또 } f^{-1}(7) = c \text{ 라 하면 } f(c) = 7 \text{ 이므로}$$

$$3c - 2 = 7 \text{ 에서 } c = 3$$

$$\text{따라서 } (g \circ f)^{-1}(19) = 3$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 5

$$\text{집합 } X = \{x | x^2 - 7x + 10 \leq 0\} \text{ 에서}$$

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0, (x-2)(x-5) \leq 0$$

$$\text{즉, } 2 \leq x \leq 5 \text{ 이므로 } X = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$$

$$\text{조건 (가)에서 } X \cap Y = \{x | 4 \leq x \leq b\} \text{ 이므로}$$

$$\text{로 } x = 4 \text{ 는 } x^2 + ax + 32 = 0 \text{ 의 근이어야 한다. 즉, } 16 + 4a + 32 = 0 \text{ 에서 } a = -12$$

$$\text{집합 } Y = \{x | x^2 - 12x + 32 \leq 0\} \text{ 에서}$$

$$x^2 - 12x + 32 \leq 0, (x-4)(x-8) \leq 0$$

$$\text{즉, } 4 \leq x \leq 8 \text{ 이므로 } Y = \{x | 4 \leq x \leq 8\}$$

$$\text{따라서 } X \cap Y = \{x | 4 \leq x \leq 5\} \text{ 이므로}$$

$$b = 5$$

(나)에 의해 함수 f 는 역함수가 존재해야 하므로 일대일 대응이고 조건 (대)를 만족시켜야 하므로 $f(2) = 8, f(5) = 4$

따라서

$$a + b + f(2) + f(5) = -12 + 5 + 8 + 4 = 5$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

$$\neg. a = b = 0 \text{ 이면}$$

$$f(f(0)) = f(0) + f(f(0)) \text{ 이므로 } f(0) = 0$$

(참)

$$\neg. f(2) = f(1+1) = f(f(1)+1)$$

$$= f(1) + f(f(1))$$

$= 1 + f(1) = 1 + 1 = 2$ (참)
 ㄷ. 자연수 k 에 대하여 $f(k) = k$ 라 가정하면
 $f(k+1) = f(f(k)+1) = f(k) + f(f(1))$
 $= k + f(1) = k + 1$
 이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n) = n$
 이다. ㄱ에서 $f(0) = 0$ 또한 만족하므로
 $f(n) = n$ ($n \in X$)이다. (참)
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 4
 $g(h(x)) = f(x)$ 에서 $2h(x) - 3 = 4x + 1$ 이
 므로 $h(x) = 2x + 2$ 이다. 따라서 $h(1) = 4$ 이
 다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ③
 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가
 일대일 대응이어야 하므로
 함수
 $f(x) = x^2 - ax + b$

$$= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표가 2보다 작거
 나 같아야 한다.
 즉, $\frac{a}{2} \leq 2$ 이어야 하므로 $a \leq 4$
 또한 함수 $f(x)$ 의 치역이 실수 전체의 집합
 R 이어야 하므로 $f(2) = 4 - 2a + b = 0$
 이때 a, b 가 음이 아닌 실수이므로
 $b = 2a - 4 \geq 0$ 에서 $a \geq 2$
 그러므로 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하도록
 하는 두 실수 a, b 사이의 관계식은
 $b = 2a - 4$ ($2 \leq a \leq 4$)이다.
 $a^2 - 3b = a^2 - 6a + 12 = (a - 3)^2 + 3$ 에서
 $a = 3$ 일 때, $a^2 - 3b = 3$ 이고 $a = 2$ 일 때,
 $a^2 - 3b = 4$ 이며 $a = 4$ 일 때, $a^2 - 3b = 4$ 이
 므로 최솟값은 3이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 5

[정답] ②
 조건 (i)에서
 $f(-1+0) = f(-1) + f(0),$
 즉 $f(-1) = f(-1) + f(0)$ 이므로
 $f(0) = 0$
 $f(-1+1) = f(-1) + f(1),$
 즉 $f(0) = f(-1) + f(1)$ 이므로
 $f(-1) = -f(1)$
 조건 (i)과 (ii)를 모두 만족시키는 경우
 는 $f(-1) = f(1) = f(0) = 0$ 이거나
 $f(-1) = -1, f(1) = 1, f(0) = 0$ 이다.
 ㄱ. $f(0) = 0$ 이다. (참)
 ㄴ. $f(-1) = -f(1)$ 이고
 $f(-0) = f(0) = 0 = -0 = -f(0)$ (참)
 ㄷ. $f(-1) = f(1) = f(0) = 0$ 인 경우
 $f(-1) = 0 = f(1)$ 이지만 $-1 \neq 1$ 이다. (거짓)
 따라서 ㄱ, ㄴ이 옳다.

13. 유리함수와 무리함수

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

$$y = \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = \frac{5}{x-1} + 2$$

 이 함수의 그래프의 점근선은 두 직선
 $x = 1, y = 2$ 이다.
 주어진 유리함수의 그래프가 어떤 직선에
 대하여 대칭이라면 그 직선은 기울기가 1
 또는 -1이고 두 점근선의 교점 (1, 2)를
 지나야 한다.
 따라서 구하는 두 직선의 방정식은
 $y = x + 1$ 또는 $y = -x + 3$
 이므로 $a + b + c + d = 4$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④
 함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 치역이 $\{y | y \geq 2\}$
 이므로 $c = 2$

또한 $y = \sqrt{ax+b} + 2$ 가 점 $(0, 4)$ 를 지나
 므로 $4 = \sqrt{b} + 2$ 즉, $b = 4$
 $y = \sqrt{ax+4} + 2$ 의 정의역이 $\{x|x \leq 2\}$ 이
 므로 $-\frac{4}{a} = 2$, 즉 $a = -2$
 따라서 $a+b+c = -2+4+2 = 4$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

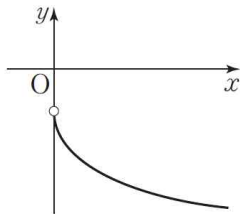
[정답] ⑤

$f(x) = \frac{2+5x}{1+x}$ 이므로

$$y = -\sqrt{(1+x)f(x)} = -\sqrt{(1+x) \times \frac{2+5x}{1+x}}$$

$$= -\sqrt{5x+2} \quad (x > 0)$$

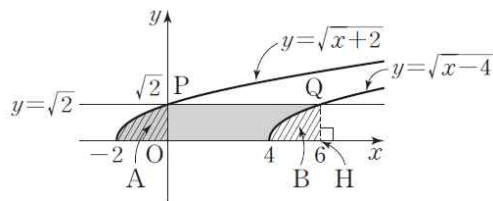
따라서 함수 $y = -\sqrt{5x+2} \quad (x > 0)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

두 함수 $y = \sqrt{x+2}$, $y = \sqrt{x-4}$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $y = \sqrt{2}$ 로 둘러싸인 부분은 그림의 색칠된 부분이다.



두 함수 $y = \sqrt{x+2}$, $y = \sqrt{x-4}$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{2}$ 가 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 $P(0, \sqrt{2})$, $Q(6, \sqrt{2})$
 점 Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(6, 0)$

이때 함수 $y = \sqrt{x-4}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x+2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 6

만큼 평행이동한 것이므로 그림에서 빗금친 A부분과 B부분의 넓이는 서로 같다.

따라서 색칠된 부분의 넓이는 직사각형 OHQP의 넓이와 같으므로 $6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ⑤

유리함수 $y = \frac{3}{x-5} + k$ 의 그래프는 유리함

수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 5만큼, y 축 방향으로 k 만큼 평행이동한 함수이다.

유리함수 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에

대칭이므로 $y = \frac{3}{x-5} + k$ 는 직선 $y = x$ 를 x 축 방향으로 5만큼, y 축 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선 $y - k = x - 5$ 에 대해 대칭이다. 이 직선이 $y = x$ 가 되기 위해서는 $k = 5$ 이다.

[다른 풀이]

함수 $y = \frac{3}{x-5} + k$ 가 직선 $y = x$ 에 대해

대칭이므로 함수 $y = \frac{3}{x-5} + k$ 의 역함수는

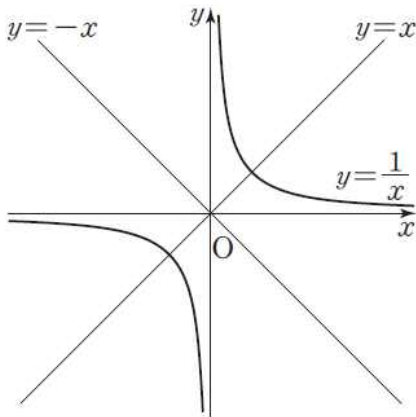
자기자신이다. $y = \frac{3}{x-5} + k$ 의 역함수를

구해보면 $y = \frac{3}{x-k} + 5$ 이고 이 함수가

$y = \frac{3}{x-5} + k$ 와 같기 위해서는 $k = 5$ 이다.

EBS교재

[정답] ①



그림에서 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프는 원점 $(0, 0)$ 에 대하여 대칭이고, 점근선은 x 축, y 축이므로 두 직선 $y = x$, $y = -x$ 에 대하여 대칭이 된다. 따라서 $a = 1$ 또는 $a = -1$ 이다.

EBS연계 기출분석 2

[정답] ⑤

주어진 함수를 변형하면

$$y = \frac{4x-5}{x-1} = 4 + \frac{-1}{x-1} = 4 - \frac{1}{x-1} \text{ 이므로}$$

점근선의 방정식은 $x = 1$, $y = 4$ 이다.

두 점근선의 교점의 좌표가 $(a, b) = (1, 4)$ 이므로 $a + b = 5$ 이다.

EBS교재

[정답] ①

함수

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax+2}{x-5} = \frac{a(x-5)+5a+2}{x-5} \\ &= a + \frac{5a+2}{x-5} \end{aligned}$$

에서 함수 $f(x)$ 의 그래프의 두 점근선은 $x = 5$, $y = a$ 이고 두 점근선이 만나는 점의 좌표가 $(b, 5)$ 이므로 $a = 5$, $b = 5$ 이다.

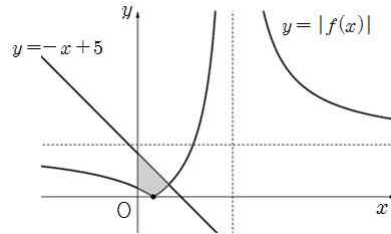
따라서 $ab = 25$

EBS연계 기출분석 3

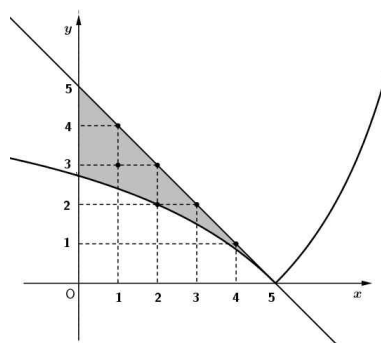
[정답] ①

$|f(x)| \leq y \leq -x + 5$ 를 그래프에 나타내면

다음 그림과 같고, 색칠한 영역의 경계 및 내부에 포함되는 자연수 순서쌍의 개수가 2 이상 4 이하가 되어야 한다.

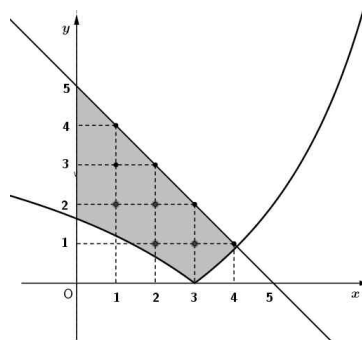


i) $k = 36$ 인 경우



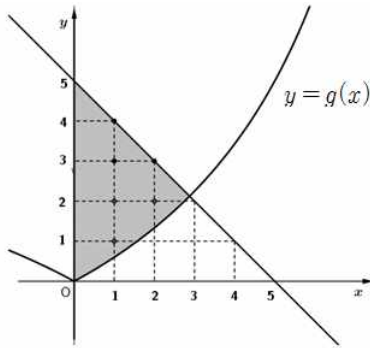
$f(1) = 2.4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1. \times \times$, $f(4) = 0. \times \times$ 이므로 영역에 포함된 자연수 순서쌍의 개수는 $2 + 2 + 1 + 1 = 6$ 개 이다. 따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.

ii) $36 < k < 66$ 인 경우



k 의 값이 커질수록 영역의 넓이는 넓어지므로 $36 < k < 66$ 일 때, 주어진 조건을 만족하는 k 는 존재하지 않는다.

iii) $k = 66$ 인 경우



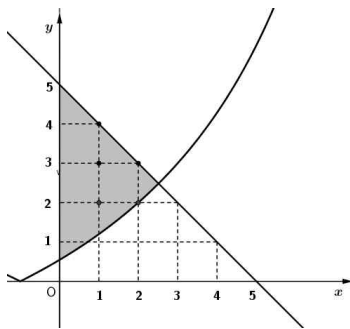
$y=f(x)$ 에서 $f(x)<0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭한 함수를 $y=g(x)$ 라 하자.

$g(1)=0.6$, $g(2)=1.\times\times$, $g(3)=2.\times\times$,
 $g(4)=3.\times\times$ 이므로 영역에 포함된 자연수
 순서쌍의 개수는 $4+2+0+0=6$ 개이다.
 따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.

iv) $k > 66$ 인 경우

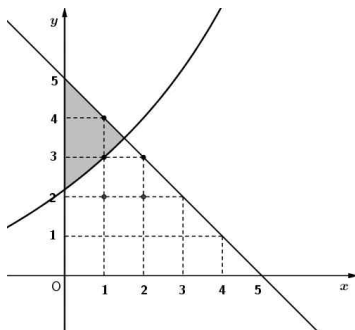
이 경우 k 의 값이 커지면 영역은 작아지고,
 $g(2)=2$ 이면, $k=72$ 이고 $g(1)=1.\times\times$ 이
 므로 영역에 포함된 자연수 순서쌍의 개수
 는 5이다.

따라서 $k > 72$ 이다.



$g(1)=3$ 일 때, $k=90$ 이고 영역에 포함된
 자연수 순서쌍의 개수는 2이다.

따라서 $k \leq 90$ 이다.



i), ii), iii), iv)에 의하여 $72 < k \leq 90$

이므로 자연수 k 의 개수는 18이다.

EBS연계 기출분석 4

[정답] 6

함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 를 x 축의 방향으로
 -4 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동
 시키면 $y-3 = \sqrt{a(x+4)+b}+c$ 이고,
 이 식을 y 축에 대하여 대칭이동 시켜 정리
 하면

$$y = \sqrt{-ax+4a+b}+(c+3) \cdots \textcircled{1}$$

이다.

①이 함수 $y = \sqrt{-2x+9}+6$ 의 그래프와
 일치하므로 $a=2$, $b=1$, $c=3$ 이다.

따라서 $a+b+c=6$ 이다.

EBS교재

[정답] ②

함수 $y = 3\sqrt{x}+n$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
 $-m$ 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이
 동한 그래프를 갖는 함수는

$$y = 3\sqrt{x+m}-n = \sqrt{9x+9m}-n$$

이것이 함수 $y = \sqrt{px+9}+3$ 과 같으므로

$$p=9, 9m=9, -n=3 \text{에서}$$

$$p=9, m=1, n=-3$$

$$\text{따라서 } m+n+p=1+(-3)+9=7$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 /

[정답] ①

함수 $f(x) = \frac{ax-1}{bx+1}$ 의 정의역은

$$\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{b}\right\} \text{이고 치역은 } \left\{y \mid y \neq \frac{a}{b}\right\} \text{이다.}$$

따라서 $a=-1$ 이다. 또한 f 의 그래프는

$$y = \frac{24}{25x} \text{를 평행이동시킨 것이므로}$$

$$y = \frac{-1+\frac{1}{b}}{bx+1} - \frac{1}{b} \text{에서 } y = \frac{\frac{-b+1}{b}}{bx+1} - \frac{1}{b},$$

$$\text{즉, } y = \frac{-b+1}{b(bx+1)} - \frac{1}{b} \text{이므로}$$

$$\frac{-b+1}{b^2} = \frac{24}{25} \text{ 이다.}$$

$$24b^2 + 25b - 25 = 0 \text{ 에서 } (3b+5)(8b-5)=0$$

$$\text{이 되어 } b = -\frac{5}{3} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a+b = -\frac{8}{3} \text{ 이다.}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

점 A의 x좌표를 a ($a > 2$)라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \left(\frac{k}{x-2} + 1 \right) - 1 \\ &= \frac{k}{a-2} \end{aligned}$$

$$\overline{PB} = a - 2$$

$$\text{이때 } \frac{k}{a-2} > 0, a-2 > 0 \text{ 이므로}$$

산술평균과 기하평균에 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PA} + \overline{PB} &= \frac{k}{a-2} + (a-2) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{k}{a-2} \times (a-2)} = 2\sqrt{k} \end{aligned}$$

(단, 등호는 $\frac{k}{a-2} = a-2$ 일 때, 성립한다.)

그런데 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값이 6이므로

$$2\sqrt{k} = 6, \sqrt{k} = 3 \text{ 에서 } k = 9 \text{ 이고}$$

$$\text{따라서 등호는 } \frac{9}{a-2} = a-2 \text{ 일 때,}$$

$$\text{즉, } a = 5 (a > 2) \text{ 이다.}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 3

두 점 A, B의 좌표를 각각 α, β 라 하면

$$A\left(\alpha, 2\alpha + \frac{s}{5}\right), B\left(\beta, 2\beta + \frac{s}{5}\right)$$

이때 α, β 는 이차방정식

$$x^2 - 2x - \frac{s}{5} + \frac{1}{2} = 0 \text{ 의 두 근이므로}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -\frac{s}{5} + \frac{1}{2}$$

$$f(s) = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \left\{ \left(2\alpha + \frac{s}{5} \right) - \left(2\beta + \frac{s}{5} \right) \right\}^2}$$

$$= \sqrt{5(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{5\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}}$$

$$= \sqrt{4s + 10} = \sqrt{4\left(s + \frac{5}{2}\right)}$$

$t = f(s)$ 의 그래프는 $t = \sqrt{4s}$ 의 그래프를

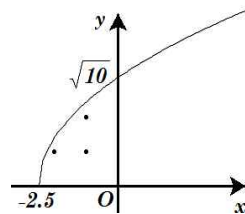
s축의 방향으로 $-\frac{5}{2}$ 만큼 평행이동한 것이

므로 연립부등식

$$t < f(s), t > 0, -\frac{5}{2} < s < 0 \text{ 이 나타내는}$$

영역에 포함된 점 중에서 s좌표와 t좌표가 모두 정수인 점의 개수는 3개다.

(그림 참조)



2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ③

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여

대칭이므로 두 함수 $y = f(x)$ 와

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 함수

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 만나는

점과 같다.

따라서 두 그래프가 만나는 서로 다른 두

점의 좌표를 $(a, a), (b, b)$ 라 하면 a, b 는

방정식 $\sqrt{x-1} + k = x$ 의 두 근이다.

$$\sqrt{x-1} + k = x \text{ 에서 } \sqrt{x-1} = x - k$$

양변을 제곱하면

$$x - 1 = x^2 - 2kx + k^2$$

$$x^2 - (2k+1)x + k^2 + 1 = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + b = 2k + 1, ab = k^2 + 1 \quad \dots\dots ①$$

이때 두 점 $(a, a), (b, b)$ 사이의 거리가

$$\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 (a-b)^2 + (a-b)^2 &= (\sqrt{2})^2 \\
 2(a-b)^2 &= 2, \quad (a-b)^2 = 1 \\
 (a+b)^2 - 4ab &= 1 \quad \dots\dots \textcircled{L} \\
 \textcircled{L} \text{을 } \textcircled{L} \text{에 대입하면} \\
 (2k+1)^2 - 4(k^2+1) &= 1 \\
 4k-3 &= 1 \\
 4k &= 4, \quad k = 1
 \end{aligned}$$

VII. 수열

14. 등차수열과 등비수열

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

$a_{2n} = 6n + 1$ 에서 n 에 1, 2를 각각 대입하면

$$a_2 = 6 \times 1 + 1 = 7, \quad a_4 = 6 \times 2 + 1 = 13$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 - a_2 = 6 = 2d \text{에서}$$

$$d = 3, \quad a_1 = a_2 - d = 7 - 3 = 4$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제11항까지의 합은

$$\frac{11(2 \times 4 + 10 \times 3)}{2} = 209$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \text{에서}$$

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제20항까지의 합이 590이므로

$$\frac{20(1 + a_{20})}{2} = 590$$

$$1 + a_{20} = 59$$

$$\text{따라서 } a_{20} = 58$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_4 = 4a_2 \text{에서}$$

$$\frac{a_4}{a_2} = r^2 = 4$$

$$r > 0 \text{이므로 } r = 2$$

$$a_3 = a_1 r^2 = 4a_1 \text{이므로}$$

$$a_1 a_3 = a_1 \times 4a_1 = 4a_1^2$$

$$\text{이때 } a_1 a_3 = 9 \text{이므로 } 4a_1^2 = 9$$

$$a_1 > 0 \text{이므로}$$

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 512

$$S_{n+2} - S_n = a_{n+2} + a_{n+1} \text{이므로}$$

$$S_{n+2} = S_n + 3 \times s^{n+1}, \quad \text{즉}$$

$$S_{n+2} - S_n = 3 \times 2^{n+1} \text{에서}$$

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_n = a \times 2^{n-1} \quad (\text{단, } n = 2, 3, 4, \dots) \text{이므로}$$

$\textcircled{L}$ 에서

$$a \times 2^{n+1} + a \times 2^n = 3 \times 2^{n+1}$$

$$\text{즉, } 3a \times 2^n = 6 \times 2^n \text{이므로}$$

$$a = 2$$

$$\text{따라서 } a_n = 2^n \text{이므로}$$

$$a_9 = 2^9 = 512$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ②

세 수 $\frac{9}{4}, a, 4$ 가 이 순서대로 등비수열을

이루므로 $a^2 = \frac{9}{4} \times 4 = 9$ 이고 a 는 양수이므로 $a = 3$ 이다.

EBS교재

[정답] 17

세 수 $x, 4, y$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$xy = 4^2 = 16$$

x, y 는 서로 다른 두 자연수이므로

$$x = 1, y = 16 \quad \text{또는} \quad x = 16, y = 1 \quad \text{또는}$$

$$x = 2, y = 8 \quad \text{또는} \quad x = 8, y = 2$$

따라서 $x + y$ 의 최댓값은

$$1 + 16 = 17$$



[정답] ①

(가)에서 $a_7 = \frac{a_6 + a_8}{2} = \frac{0}{2} = 0$ 이다.

(나)에서 $|a_6| = |a_7| + 3$ 인데 $a_7 = 0$ 이고 공차가 양수이므로 $a_6 = -3$ 이다.

따라서 공차를 d 라 하면 $d = 3$ 이고

$$a_2 = a_7 - 5d = -15 \text{이다.}$$



[정답] ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} = a_1 + 18 \text{에서}$$

$$a_{10} - a_1 = (a_1 + 18d) - a_1 = 18d = 18$$

$$\text{이므로 } d = 2$$

$$a_1 + a_4 + a_7 = 0 \text{에서}$$

$$a_1 + a_4 + a_7 = a_1 + (a_1 + 3d) + (a_1 + 6d)$$

$$= 3a_1 + 9d$$

$$= 3a_1 + 18 = 0$$

$$\text{이므로 } a_1 = -6$$

따라서

$$a_{20} = a_1 + 19d$$

$$= -6 + 19 \times 2 = 32$$



[정답] 19

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_n = 3 \times r^{n-1} \text{이다.}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_6}{a_4} = r - r^2 \text{ 이고 정리하면}$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } (2r - 1)^2 = 0 \text{ 이므로 } r = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a_5 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16} \text{ 이다.}$$

$$p = 16, q = 3 \text{ 이므로 } p + q = 19 \text{ 이다.}$$



[정답] ③

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_4}{a_2} = r^2, \frac{a_3}{a_2} = r \text{ 이므로}$$

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_3}{a_2} = 2 \text{ 에서}$$

$$r^2 + r = 2 \text{ 이고 정리하면}$$

$$(r + 2)(r - 1) = 0$$

$$\text{방정식을 풀면 } r = -2 \text{ 또는 } r = 1$$

$$a_1 = 1, a_2 = a_1 r = r < 0 \text{ 이므로}$$

$$r = -2$$

$$\text{따라서 } a_4 = 1 \times (-2)^3 = -8$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 /

[정답] ①

직각삼각형의 세 변의 길이를 크기순으로 나열하면 등차수열을 이루므로 세 변의 길이를 작은 수부터 차례로

$$a, a + d, a + 2d \quad (a > 0, d > 0)$$

으로 놓을 수 있다.

빗변의 길이가 $a + 2d$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2$$

이 식을 정리하면

$$a^2 - 2ad - 3d^2 = 0$$

$$(a - 3d)(a + d) = 0$$

$$a > 0, d > 0 \text{ 이므로}$$

$$a = 3d$$

그러므로 세 변의 길이는 $3d, 4d, 5d$ 이다.

삼각형의 넓이가 24이므로

$$\frac{1}{2} \times 3d \times 4d = 24$$

$$d^2 = 4$$

$$d > 0 \text{ 이므로}$$

$$d = 2$$

따라서 세 변의 길이의 합은

$$3d + 4d + 5d = 12d = 24$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

선분 BD의 중점을 M이라 하자.
직각삼각형 BCM에서

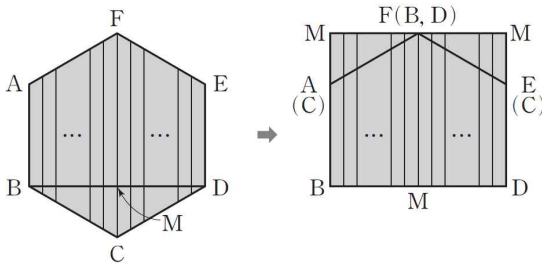
$$\overline{BC} = 3, \angle CBM = 30^\circ \text{ 이므로}$$

$$\overline{MC} = \frac{3}{2}$$

$$\overline{FC} = 6 \text{ 이므로}$$

$$\overline{FM} = \overline{FC} - \overline{MC} = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

다음 그림과 같이 두 삼각형 BCM, CDM을 잘라 두 점 B, D는 모두 점 F에, 두 선분 BC, CD는 각각 FA, EF와 일치하도록 두 삼각형을 옮기면 세로의 길이가 선분 FM의 길이와 같은 직사각형이 만들어진다.



그러므로 구하는 정육각형의 $(4n-1)$ 개의 선분의 길이의

합 a_n 은

$$\begin{aligned} a_n &= (4n-1) \times \overline{FM} + \overline{MC} \\ &= \frac{9}{2} (4n-1) + \frac{3}{2} \\ &= 18n-3 \text{ 이고} \end{aligned}$$

$a_n > 200$ 에서

$$18n-3 > 200$$

$$n > \frac{203}{18} = 11.2 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 12이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

조건 (가)에서 등차수열의 등차중항을 이용하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 &= (a_1 + a_9) + (a_3 + a_7) + a_5 \\ &= 2a_5 + 2a_5 + a_5 = 5a_5 = 120 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a_5 = 24$$

첫째항이 3인 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)라 하면

$$\text{조건 (나)에서 } 6b_3 + b_5 = 2a_5 \text{ 이므로}$$

$$18r^2 + 3r^4 = 2 \times 24 = 48$$

$$r^4 + 6r^2 - 16 = 0$$

$$(r^2 + 8)(r^2 - 2) = 0$$

이때 $r > 0$ 이므로 $r = \sqrt{2}$ 이다. 즉,

$$b_1 = 3, b_n = 3 \times (\sqrt{2})^{n-1} \text{ (단, } n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\text{따라서 } \frac{a_5}{b_5} = \frac{24}{12} = 2$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ①

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r (r 는 자연수)라 하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 &= a(1 + r^3) = a(1 + r)(1 - r + r^2) = \frac{65}{16} \\ &\dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$$a_2 + a_3 = ar(1 + r) = \frac{5}{4} \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변을 ㉡의 양변으로 나누면

$$1 - r + r^2 = \frac{13}{4}r \text{ 이고}$$

$$\text{정리하면 } 4r^2 - 17r + 4 = 0 \text{ 이므로}$$

구하는 공비 r 는 $\frac{1}{4}$ 또는 4이다.

그런데, 공비는 자연수이므로 $r = 4$ 이고

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 $\frac{1}{16}$ 이 된다.

이에 따라, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 16이고

공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이다.

그런데, $S_4 - S_2$ 의 값은 $a_4 + a_3$ 이므로 구하

는 값

$$S_4 - S_2 = a_4 + a_3 = 16\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 16\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

2018수능대비 EBS 연계 예상문항 5

[정답] ①

세 끈의 길이 a, b, c ($a \leq b \leq c$)를 a, ar, ar^2 (a, r 는 자연수)과 같이 놓을 수 있다.

세 끈의 길이의 합이 39이므로

$$a + ar + ar^2 = a(1 + r + r^2) = 39 \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $r = 1$ 일 때

$$㉠ \text{에서 } 3a = 39, \text{ 즉 } a = 13$$

$$\text{따라서 } a = 13, b = 13, c = 13$$

(ii) $r = 2$ 일 때

㉠에서 $7a = 39$, 만족하는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

(iii) $r = 3$ 일 때

$$㉠ \text{에서 } 13a = 39, \text{ 즉 } a = 3$$

$$\text{따라서 } a = 3, b = 9, c = 27$$

(iv) $r = 4$ 일 때

㉠에서 $21a = 39$, 만족하는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

(v) $r = 5$ 일 때

㉠에서 $31a = 39$, 만족하는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

(vi) $r \geq 6$ 일 때

$r^2 + r + 1 > 39$ 이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 a 는 없다.

(i)~(vi)에 의하여 c 의 값이 될 수 있는 모든 수의 합은

$$13 + 27 = 40$$

15. 수열의 합

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)(b_k + 1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{10} (a_k b_k + a_k + b_k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k b_k + \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 5 + 20 + 1 \times 10 \\ &= 35 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n (k-1)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i(i-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \{k^2 - (k^2 - k)\} = \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{(n-1)n}{2} = 55 \end{aligned}$$

$$n^2 - n - 110 = 0, (n-11)(n+10) = 0$$

$$\text{따라서 } n = 11$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d > 0$)라 하자.

조건 (가)에서 $f(a_{10}) = |2a_{10} + 4| = 0$ 이므로

$$a_{10} = -2$$

이때 $a_{10} = a + 9d$ 이므로

$$a + 9d = -2 \quad \dots\dots ㉠$$

함수 $f(x) = |2x + 4|$ 의 그래프는 직선 $x = -2$ 에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{19} f(a_k) &= \sum_{k=1}^9 f(a_k) + f(a_{10}) + \sum_{k=11}^{19} f(a_k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^9 f(a_k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^9 (-2a_k - 4) \\ &= -4 \sum_{k=1}^9 a_k - 2 \times 4 \times 9 \end{aligned}$$

$$= -4 \times \frac{9(2a+8d)}{2} - 72$$

$$= -36a - 144d - 72$$

조건 (나)에서

$$-36a - 144d - 72 = 360 \text{ 이므로}$$

$$a + 4d = -12 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

⑦, ①을 연립하여 풀면

$$a = -20, d = 2 \text{ 이므로}$$

$$a_n = -20 + (n-1) \times 2 = 2n - 22$$

따라서

$$\sum_{k=11}^{19} \frac{1}{\sqrt{\frac{a_k}{2}} + \sqrt{\frac{a_{k+1}}{2}}}$$

$$= \sum_{k=11}^{19} \frac{1}{\sqrt{k-11} + \sqrt{k-10}}$$

$$= - \sum_{k=11}^{19} (\sqrt{k-11} - \sqrt{k-10})$$

$$= - \{(\sqrt{0} - \sqrt{1}) + (\sqrt{1} - \sqrt{2})$$

$$+ (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{8} - \sqrt{9})\}$$

$$= 3$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

$n=1$ 일 때, $2x+y=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 2), (1, 0)$ 이므로 $a_1 = 2$

$n=2$ 일 때, $2x+y=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 4), (1, 2), (2, 0)$ 이므로 $a_2 = 3$

$n=3$ 일 때, $2x+y=6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 6), (1, 4), (2, 2), (3, 0)$ 이므로 $a_3 = 4$

$\vdots$

$n=k$ 일 때, $2x+y=2k$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(0, 2k), (1, 2k-2), (2, 2k-4), \dots, (k, 0)$ 이므로 $a_k = k+1$ 이다.

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{22} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{22} = \frac{5}{11}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] 150

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ 이므로 자연수 k 에 대해

$$f(2k) = k + 2 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15} f(2k) = \sum_{k=1}^{15} (k+2)$$

$$= \frac{15 \times 16}{2} + 2 \times 15 = 150$$

EBS교재

[정답] 11

$$\sum_{k=1}^8 f(k+2) = \sum_{k=3}^{10} f(k-1) \text{에서}$$

$$f(3) + f(4) + f(5) + \dots + f(10)$$

$$= f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(9)$$

좌변으로 정리하면

$$\{f(3) + f(4) + f(5) + \dots + f(10)\}$$

$$- \{f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(9)\} = 0$$

즉, $f(10) - f(2) = 0$ 이므로

$$f(2) = f(10) \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 주어진 이차함수는

$$f(x) = -(x-a)^2 + a^2 \text{이고}$$

이 이차함수의 그래프는 ①으로부터

$$\text{직선 } x = \frac{2+10}{2} = 6 \text{에 대하여 대칭이어야}$$

한다.

$$\text{즉, } a = 6 \text{이므로 } f(x) = -x^2 + 12x \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(1) = -1 + 12 = 11$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ②

이차방정식 $x^2 - 14x + 24 = 0$ 의 두 근이 a_3, a_8 이므로 근과 계수와의 관계에 의하여 $a_3 + a_8 = 14$ 이다.

$$\sum_{n=3}^8 a_n = \frac{6 \times (a_3 + a_8)}{2} = 3 \times 14 = 42$$



[정답] 5

이차함수 $y = -x^2 + kx$ 의 그래프와 직선 $y = 6$ 이 만나는 서로 다른 두 점 A, B의 각각의 x 좌표 α, β 는 방정식 $-x^2 + kx = 6$, 즉, $x^2 - kx + 6 = 0 \dots \textcircled{7}$

의 두 근이다.

즉, 이차방정식 $\textcircled{7}$ 의 서로 다른 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k \dots \textcircled{8}$

세 수 $\frac{5}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \frac{5}{\beta^2}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루면

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 이 $\frac{5}{\alpha^2}$ 와 $\frac{5}{\beta^2}$ 의 등비중항이므로

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{5}{\alpha^2} \times \frac{5}{\beta^2} \text{에서}$$

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)^2 = \left(\frac{5}{\alpha\beta}\right)^2, \alpha + \beta = 5$$

따라서 $\textcircled{8}$ 으로부터 $k = 5$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

$x^2 - (n^2 + 3n)x + (n^2 - 2)(3n + 2) \leq 0$ 에서 $(x - n^2 + 2)(x - 3n - 2) \leq 0$

우선 부등식 $n^2 - 2 \leq 3n + 2$ 를 정리하면 등식을 만족시키는 자연수는 $n = 1, 2, 3, 4$ 이다.

$$\text{즉, } a_n = 3n + 2 - (n^2 - 3)$$

$$= -n^2 + 3n + 5 \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

또한, 부등식 $n^2 - 2 \geq 3n + 2$ 를 정리하면 등식을 만족시키는 자연수 n 은 5, 6, 7, ...이다.

$$\text{즉, } a_n = n^2 - 2 - (3n + 1)$$

$$= n^2 - 3n - 3 \quad (n = 5, 6, 7, \dots)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^4 a_n + \sum_{n=5}^{10} a_n$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^4 (-n^2 + 3n + 5) + \sum_{n=5}^{10} (n^2 - 3n - 3) \\ &= 2 \sum_{n=1}^4 (-n^2 + 3n) + \sum_{n=1}^{10} (n^2 - 3n - 3) + 32 \\ &= 2\{2 + 2 + 0 - 4\} + \{385 - 3 \times 55 - 30\} + 32 \\ &= 222 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

$|x - y| = n$ 에서

$$y = x - n \text{ 또는 } y = x + n$$

한편, 직선 $y = x + k$ 가 원

$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ 에 접할 때의 k 의 값을 구해 보자.

원의 중심 $(1, 4)$ 와 직선 $x - y + k = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{25} = 5$ 와 같을 때이므로

$$\frac{|1 - 4 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 5 \text{ 이고 정리하면}$$

$$|k - 3| = 5\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } k = 3 + 5\sqrt{2} \text{ 또는 } k = 3 - 5\sqrt{2}$$

그러므로 k 의 값에 따른 원

$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ 와 직선 $y = x + k$ 의 위치 관계는 다음과 같다.

i) $k > 3 + 5\sqrt{2}$ 또는 $k < 3 - 5\sqrt{2}$ 일 때, 만나지 않는다.

ii) $k = 3 + 5\sqrt{2}$ 또는 $k = 3 - 5\sqrt{2}$ 일 때, 접한다.

iii) $3 - 5\sqrt{2} < k < 3 + 5\sqrt{2}$ 일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

한편, 원 $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ 위의 점 $P(x, y)$ 중에서

$|x - y| = n$ 을 만족시키는 점은

원 $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ 와 두 직선

$y = x - n$ 또는 $y = x + n$ 이 만나는 점과 같다.

따라서 이러한 점의 개수 a_n 은

$$n = 1, 2, 3, 4 \text{일 때, } a_n = 4$$

$$n = 5, 6, 7, 8, 9, 10 \text{일 때, } a_n = 2$$

$n \geq 11$ 일 때, $a_n = 0$

이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = 4 \times 4 + 6 \times 2 = 28$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ③

원 C 의 중심이 점 $(2n, 2\sqrt{3}n)$ 이므로 원 C 의 중심과 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{4n^2 + (2\sqrt{3}n)^2} = \sqrt{16n^2} = 4n$$

이때 원 C 의 반지름의 길이가 n^2 이므로 원 C 위의 점과 원점 사이의 거리의 최솟값 a_n 은 $4n$ 과 n^2 의 대소 관계에 따라 달라진다.

먼저, $4n \geq n^2$ 즉 $0 \leq n \leq 4$ 일 때는

$$a_n = 4n - n^2$$

그리고, $4n \leq n^2$ 즉 $n > 4, n < 0$ 일 때는

$$a_n = n^2 - 4n$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^4 (4k - k^2) + \sum_{k=5}^{10} (k^2 - 4k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^4 (4k - k^2) + \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 4k) \\ &= 2 \left(4 \times \frac{4 \times 5}{2} - \frac{4 \times 5 \times 9}{6} \right) + (385 - 4 \times 55) \\ &= 20 + 165 = 185 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ②

$$S_n = \frac{n\{2 \times 2 + (n-1) \times 4\}}{2} = 2n^2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{S_k S_{k+1}}} &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{2k^2 \cdot 2(k+1)^2}} \\ &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2k(k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{101} \right\} = \frac{50}{101}$$

16. 수학적 귀납법

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

$a_{2n+1} = a_{2n-1} + 4$ 에서 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_3 = a_1 + 4 = 3 + 4 = 7$$

$$a_5 = a_3 + 4 = 7 + 4 = 11$$

$$a_7 = a_5 + 4 = 11 + 4 = 15$$

$a_{2n+2} = 2a_{2n}$ 에서 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_4 = 2a_2$$

$$a_4 = 2a_4 = 2 \times 2a_2 = 4a_2$$

$$a_8 = 2a_6 = 2 \times 4a_2 = 8a_2$$

$$2a_7 = a_6 + a_8 \text{에서}$$

$$2 \times 15 = 4a_2 + 8a_2$$

$$\text{따라서 } a_2 = \frac{5}{2}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ③

$a_{n+1} = 3 - a_n^2$ 에서 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = 3 - a_1^2 = 3 - 1^2 = 2$$

$$a_3 = 3 - a_2^2 = 3 - 2^2 = -1$$

$$a_4 = 3 - a_3^2 = 3 - (-1)^2 = 2$$

$$a_5 = 3 - a_4^2 = 3 - 2^2 = -1$$

⋮

따라서

$$a_1 = 1, a_{2n} = 2, a_{2n+1} = -1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{11} a_k = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots$$

$$\cdots + (a_{10} + a_{11}) \\ = 1 + 5 \times \{2 + (-1)\} = 6$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

(i) $n = 1$ 일 때,

(좌변) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$ 이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k+1} < 1$$

이므로

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k+3} \\ &= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k+1} \right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+3} \right) - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

이때 $2k+3 > 2k+2$ 이므로

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k+3} \\ & < \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k+1} \right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+3} \right) - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k+1} < 1$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 $p = \frac{5}{6}$, $f(k) = \frac{1}{k+1}$ 이므로

$$f(p) = f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{\frac{5}{6} + 1} = \frac{6}{11}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] 13

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

주어진 규칙대로 각 항을 구하면

$$b_2 = b_1 + a_2 = a_1 + a_2$$

$$b_3 = b_2 - a_3 = a_1 + a_2 - a_3$$

$$b_4 = b_3 + a_4 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4$$

$$b_5 = b_4 + a_5 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5$$

$$b_6 = b_5 - a_6$$

$$= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6$$

$$b_7 = b_6 + a_7$$

$$= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7$$

$$b_8 = b_7 + a_8$$

$$= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8$$

$$b_9 = b_8 - a_9$$

$$= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 - a_9$$

$$b_{10} = b_9 + a_{10}$$

$$= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 - a_9 + a_{10}$$

$b_{10} = b_9 + a_{10} = a_{10}$ 이므로 $b_9 = 0$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} b_9 &= a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + a_7 + a_8 - a_9 \\ &= 3a_1 + 6d = 0 \quad \therefore a_1 = -2d \end{aligned}$$

$b_9 = b_8 - a_9 = 0$ 이므로 $b_8 = a_9$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{b_8}{b_{10}} = \frac{a_9}{a_{10}} = \frac{a_1 + 8d}{a_1 + 9d} = \frac{6d}{7d} = \frac{6}{7}$$

이므로

$p = 7$, $q = 6$ 이 되어 $p + q = 13$ 이다.

EBS교재

[정답] ⑤

주어진 식의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + (-1) \times 2 = a - 2$$

$$a_3 = a_2 + (-1)^2 \times 2 = (a - 2) + 2 = a$$

$$a_4 = a_3 + 1 = a + 1$$

$$a_5 = a_4 + (-1)^4 \times 2 = (a + 1) + 2 = a + 3$$

$$a_6 = a_5 + (-1)^5 \times 2 = (a + 3) - 2 = a + 1$$

$$a_7 = a_6 + 1 = (a + 1) + 1 = a + 2$$

$$a_8 = a_7 + (-1)^7 \times 2 = (a + 2) - 2 = a$$

$$a_9 = a_8 + (-1)^8 \times 2 = a + 2$$

⋮

이므로 수열 $a_3, a_6, a_9, \dots$ 는 첫째항이 a 이고 공차가 1인 등차수열을 이룬다.
따라서

$$a_{3k} = a + (k-1) \times 1 = a + k - 1 \quad (k \text{는 자연수})$$
 에서

$$a_{15} = a + 5 - 1 = a + 4 = 43$$
 이므로

$$a = 39$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③
 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 15, 공비가 4인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = \frac{15(4^{100} - 1)}{4 - 1} = 5 \times 4^{100} - 5$$

$$= A \times 4^{100} - 5$$
 따라서 구하는 $A = 5$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 35
 조건 (가)에 의해 자연수 n 에 대하여
 $a_n + a_{n+1} = 2n + 1$ 이므로 자연수 k 에 대하여
 $a_{2k-1} + a_{2k} = 4k - 1$ 이고
 조건 (나)에 의해 5 이하의 어떤 자연수 k 에 대하여
 $a_{2k-1} - a_{2k} = 2k - 1$
 이므로 연립하여 풀면
 5 이하의 어떤 자연수 k 에 대하여
 $a_{2k} = k$ 이다.
 한편, 조건 (가)에 의해 자연수 n 에 대하여
 $a_n + a_{n+1} = 2n + 1$ 이므로
 $a_{2n} + a_{2n+1} = 4n + 1$,
 $a_{2n+1} + a_{2n+2} = 4n + 3$ 이고 연립하여
 풀면 $a_{2n} - a_{2n+2} = -2$ 즉,
 $a_{2n+2} = a_{2n} + 2$ 이다.
 따라서 구하는 a_{10} 은
 $a_{10} = a_8 + 2 = a_6 + 4 = a_4 + 6 = a_2 + 8$ 이고

5 이하의 어떤 자연수 k 에 대하여
 $a_{2k} = k$ 이므로
 $a_{10} = 5$ 또는 6 또는 7 또는 8 또는 9이므로 모든 수의 합은
 $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤
 직선 $P_{2n-1}P_{2n+1}$ 의 기울기를 a_{2n-1} 라 하고, 직선 $P_{2n-2}P_{2n}$ 의 기울기를 a_{2n} 라 하였으므로

$$a_{2n-1} = \frac{(x_{2n+1})^2 - (x_{2n-1})^2}{x_{2n+1} - x_{2n-1}} = x_{2n+1} + x_{2n-1}$$

$$a_{2n} = \frac{(x_{2n})^2 - (x_{2n-2})^2}{x_{2n} - x_{2n-2}} = x_{2n} + x_{2n-2}$$
 이고

$$a_{2n+1} = \frac{(x_{2n+3})^2 - (x_{2n+1})^2}{x_{2n+3} - x_{2n+1}} = x_{2n+3} + x_{2n+1}$$

$$a_{2n+2} = \frac{(x_{2n+2})^2 - (x_{2n})^2}{x_{2n+2} - x_{2n}} = x_{2n+2} + x_{2n}$$
 이다.
 따라서,

$$2d = a_{2n+1} - a_{2n-1} = x_{2n+3} - x_{2n-1}$$

$$2d = a_{2n+2} - a_{2n} = x_{2n+2} - x_{2n-2}$$

$$\neg. x_6 = 2d + x_2 = 2d + x_2 + x_0$$

$$= 2d + a_2 = a_4 \quad (\text{참})$$

$$\neg. x_{4n} + x_{4n+1} + x_{4n+2} + x_{4n+3} + 8d$$

$$= (x_{4n} + x_{4n+2}) + (x_{4n+1} + x_{4n+3}) + 8d$$

$$= a_{4n+2} + a_{4n+1} + 8d$$

$$= a_{4n+6} + a_{4n+5}$$

$$= (x_{4n+4} + x_{4n+6}) + (x_{4n+5} + x_{4n+7})$$

$$= x_{4n+4} + x_{4n+5} + x_{4n+6} + x_{4n+7} \quad (\text{참})$$

$$\neg. x_{16} = x_{12} + 2d = \dots = 8d < 50$$
 이고 a_1, d 는 $0 < a_1 < d$ 인 자연수이므로
 순서쌍 (a_1, d) 는
 (1, 2)
 (1, 3), (2, 3)
 (1, 4), (2, 4), (3, 4)

(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)
 (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)
 따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a_1, d) 의 개수는 15이다. (참)
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. 지수

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

-30의 세제곱근 중 실수인 것은
 $\sqrt[3]{-30} = -\sqrt[3]{30}$ 이므로
 $a = 1$
 10의 네제곱근 중 실수인 것은
 $\sqrt[4]{10}, -\sqrt[4]{10}$ 이므로
 $b = 2$
 따라서 $a + b = 3$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

$$\begin{aligned} 16^2 \times (2^5)^{-2} \div \left(\frac{1}{8}\right)^2 &= (2^4)^2 \times 2^{-10} \div (2^{-3})^2 \\ &= 2^8 \times 2^{-10} \div 2^{-6} \\ &= 2^{8-10-(-6)} \\ &= 2^4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

$a = (\sqrt{2})^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{10}}, b = (\sqrt[3]{3})^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{12}}$ 이고
 $(ab)^n = \left(2^{\frac{1}{10}} \times 3^{\frac{1}{12}}\right)^n = 2^{\frac{n}{10}} \times 3^{\frac{n}{12}}$
 이 정수가 되려면 밑 2, 3이 서로소이므로
 지수인 $\frac{n}{10}$ 과 $\frac{n}{12}$ 은 각각 자연수이어야 한다.
 즉, n 은 10과 12의 공배수이다.

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 10과 12의 최소공배수인 60이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ⑤

종이를 한쪽 방향으로만 3회 접으므로
 $n = 3$ 이고, 주어진 관계식에 대입하면

$$\begin{aligned} L &= \frac{\pi t}{6} = (2^3 + 4)(2^3 - 1) \\ &= \frac{\pi t}{6} \times 12 \times 7 \\ &= 14\pi t \end{aligned}$$

따라서 종이의 최소 길이는 종이의 두께의 14 π 배이므로
 $k = 14\pi$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ②

$$8 \times 2^{-2} = 2^{3-2} = 2$$

EBS교재

[정답] ③

$$\begin{aligned} 12 \times 8^{-\frac{2}{3}} &= 12 \times (2^3)^{-\frac{2}{3}} \\ &= 12 \times 2^{3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} \\ &= 12 \times 2^{-2} = 12 \times \frac{1}{4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ③

$$3 \times 27^{\frac{1}{3}} = 3 \times (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3 \times 3 = 9$$

EBS교재

[정답] ①

$$\begin{aligned} 4^{-\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{6}} \div 16^{\frac{1}{8}} &= (2^2)^{-\frac{1}{4}} \times (2^3)^{\frac{1}{6}} \div (2^4)^{\frac{1}{8}} \\ &= 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

$$\neg. f(3, 16) = \sqrt[4]{16} = 2^{\frac{4}{4}} = 2 \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned}
&\neg. \{f(7, 3)\}^2 \times f(3, 3) \times f(1, 3) \\
&= \{\sqrt[8]{3}\}^2 \times \sqrt[4]{3} \times \sqrt{3} = 3^{\frac{2}{8}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}} \\
&= 3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 3^1 = 3 \text{ (참)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\neg. f(n, f(n, a)) = \sqrt[n+1]{\sqrt[n+1]{a}} = \sqrt[(n+1)^2]{a} \\
&= \sqrt[n^2+2n+1]{a} = f(n^2+2n, a) \text{ (참)}
\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ①

$$\frac{1}{3^x} = 441 \text{에서 } 3^x = \frac{1}{441} = 441^{-1} \text{이므로}$$

$$3 = 441^{-\frac{1}{x}} \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\frac{1}{7^y} = 100 \text{에서 } 7^y = \frac{1}{441} = 441^{-1} \text{이므로}$$

$$7 = 441^{-\frac{1}{y}} \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 변끼리 곱하면

$$3 \times 7 = 441^{-\frac{1}{x}} \times 441^{-\frac{1}{y}}$$

$$21 = 441^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}$$

$$21 = 21^{-2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}$$

$$\text{즉, } -2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \text{ 이고 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

$$A_n(2^{\frac{3}{n}}, 0), B_n(0, 2^{\frac{3}{n}}) \text{ 이고}$$

$$P_n(x_n, y_n) \text{이라 두면 } (x_n)^2 + (y_n)^2 = 2^{\frac{6}{n}} \text{ 이다. 또한}$$

사각형 $OA_nP_nB_n$ 의 넓이는

$$= \triangle OA_nP_n + \triangle OB_nP_n$$

$$= \frac{1}{2} \times 2^{\frac{3}{n}} \times y_n + \frac{1}{2} \times 2^{\frac{3}{n}} \times x_n$$

$$= \frac{1}{2} \times 2^{\frac{3}{n}} \times (x_n + y_n)$$

$= 2^{-1+\frac{3}{n}}(x_n + y_n)$ 이므로 $x_n + y_n$ 이 최대일 때 사각형 $OA_nP_nB_n$ 의 넓이는 최댓값을 가진다.

$x_n + y_n = k$ 라 두면 원점에까지의 거리가

반지름 $2^{\frac{3}{n}}$ 과 같을 때 k 는 최대가 되므로

$$2^{\frac{3}{n}} = \frac{|-k|}{\sqrt{1+1}} \text{ 이고 } k \text{의 최댓값은 } 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{n}} \text{ 이다.}$$

사각형 $OA_nP_nB_n$ 의 넓이의 최댓값 $f(n)$ 은

$$= 2^{-1+\frac{3}{n}} 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{n}}$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}+\frac{6}{n}}$$

이다. 따라서

$$f(3) = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

18. 로그

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

밑의 조건에서 (밑) > 0 , (밑) $\neq 1$ 이므로 $x-3 > 0$, $x-3 \neq 1$

즉, $x > 3, x \neq 4$ ㉠
 진수의 조건에서 (진수) > 0 이므로
 $-x^2 + 10x - 16 > 0, x^2 - 10x + 16 < 0,$
 $(x-2)(x-8) < 0$
 즉, $2 < x < 8$ ㉡
 ㉠, ㉡에서
 $3 < x < 8, x \neq 4$
 따라서 구하는 모든 정수 x 의 값의 합은
 $5 + 6 + 7 = 18$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

$a = \log_5 4, b = \log_5 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \log_4 60 &= \frac{\log_5 60}{\log_5 4} \\ &= \frac{\log_5 (3 \times 4 \times 5)}{\log_5 4} \\ &= \frac{\log_5 3 + \log_5 4 + \log_5 5}{\log_5 4} \\ &= \frac{a + b + 1}{a} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

$\log 1 = 0, \log 10 = 1$ 이므로
 $0 < \log 2 < 1$ 에서 $f(1) = 0$
 $0 < \log 2^2 < 1$ 에서 $f(2) = 0$
 $0 < \log 2^3 < 1$ 에서 $f(3) = 0$
 $\log 100 = 2$ 이므로
 $1 < \log 2^4 < 2$ 에서 $f(4) = 1$
 $1 < \log 2^5 < 2$ 에서 $f(5) = 1$
 $1 < \log 2^6 < 2$ 에서 $f(6) = 1$
 $\log 1000 = 3$ 이므로
 $2 < \log 2^7 < 3$ 에서 $f(7) = 2$
 $2 < \log 2^8 < 3$ 에서 $f(8) = 2$
 $2 < \log 2^9 < 3$ 에서 $f(9) = 2$
 $\log 10000 = 4$ 이므로
 $3 < \log 2^{10} < 4$ 에서 $f(10) = 3$
 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} f(k) &= 0 \times 3 + 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ①

$$\log_{15} 3 + \log_{15} 5 = \log_{15} (3 \times 5) = \log_{15} 15 = 1$$

EBS교재

[정답] ②

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \log_3 12 - 2 \log_3 2 + \log_3 18 \\ &= \log_3 \sqrt{12} - \log_3 4 + \log_3 18 \\ &= \log_3 2\sqrt{3} - \log_3 4 + \log_3 18 \\ &= \log_3 \left(2\sqrt{3} \times \frac{1}{4} \times 18 \right) \\ &= \log_3 9\sqrt{3} \\ &= \log_3 3^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

EBS연계 기출분석 2

[정답] 3

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{9}{2} + \log_3 6 &= \log_3 \left(\frac{9}{2} \times 6 \right) \\ &= \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \log_3 3 = 3 \end{aligned}$$

EBS교재

[정답] ①

$$\begin{aligned} &\log_2 \sqrt{3} + 3 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ &= \log_2 \sqrt{3} + \log_2 2\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ &= \log_2 \frac{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ &= \log_2 \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\ &= \log_2 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 /

[정답] 10

$\log 7.5 = 0.8751$ 일 때 $\log m = -1.1249$ 이

다. $\log \frac{m}{15} = a + b \log 5$ 일 때,

$$\begin{aligned}\log m &= -1.1249 = -2 + 0.8751 \\ &= -2 \log 10 + \log 7.5 = \log 0.075\end{aligned}$$

즉, $m = 0.075$ 이므로

$$\log \frac{0.075}{15} = \log 0.005$$

$$= \log 10^{-3} \times 5 = -3 + \log 5$$

따라서 $a = -3$, $b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 10$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ②

$x^2 - kx + 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근 $\log_5 \alpha$, $\log_5 \beta$ 를 가질 때,

$$\log_\alpha \beta - \log_\beta \alpha = \frac{8}{3}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 \alpha + \log_5 \beta = k, \log_5 \alpha \times \log_5 \beta = 3$$

이므로

$$\log_\alpha \beta - \log_\beta \alpha = \frac{\log_5 \beta}{\log_5 \alpha} - \frac{\log_5 \alpha}{\log_5 \beta}$$

$$= \frac{(\log_5 \beta)^2 - (\log_5 \alpha)^2}{\log_5 \alpha \times \log_5 \beta}$$

$$= \frac{(\log_5 \beta + \log_5 \alpha)(\log_5 \beta - \log_5 \alpha)}{\log_5 \alpha \times \log_5 \beta}$$

$$= \frac{k(\log_5 \beta - \log_5 \alpha)}{3} = \frac{8}{3}$$

따라서 $k(\log_5 \beta - \log_5 \alpha) = 8$ 에서

$$k = \frac{8}{\log_5 \beta - \log_5 \alpha}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{(\log_5 \beta + \log_5 \alpha)^2 - 4 \log_5 \beta \times \log_5 \alpha}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{k^2 - 12}}$$

이므로

$k \sqrt{k^2 - 12} = 8$ 이고 양변을 제곱하면

$$k^2(k^2 - 12) = 64 \text{ 이고 } k^4 - 12k^2 - 64 = 0 \text{ 이}$$

므로 $k^2 = 16$ 또는 -4 이므로 $k^2 = 16$ 이고 k 가 자연수이므로 $k = 4$ 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

6^n 의 모든 양의 약수는

$$(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n)(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n)$$

의 전개식에 나오는 $(n+1)^2$ 개의 항들이다.

즉 $2^k 3^m$ ($0 \leq k, m \leq n$) 꼴로 표현된다.

$$\log_6 2^k 3^m = \log_6 2^k + \log_6 3^m \quad (0 \leq k, m \leq n)$$

이므로

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n^2+2n+1} \log_6 a_k$$

$$= \log_6 1 + \log_6 2 + \log_6 2^2 + \cdots + \log_6 2^n$$

$$+ \log_6 3 \times 1 + \log_6 3 \times 2 + \cdots + \log_6 3 \times 2^n$$

$$+ \log_6 3^2 \times 1 + \log_6 3^2 \times 2 + \cdots + \log_6 3^2 \times 2^n$$

$\vdots$

$$+ \log_6 3^n \times 1 + \log_6 3^n \times 2 + \cdots + \log_6 3^n \times 2^n$$

$$= \log_6 1 \times 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^n$$

$$+ \log_6 3^{n+1} \times 1 \times 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^n$$

$$+ \log_6 3^{2(n+1)} \times 1 \times 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^n$$

$\vdots$

$$+ \log_6 3^{n(n+1)} \times 1 \times 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^n$$

$$= \log_6 2^{\frac{n(n+1)}{2}} + \log_6 3^{n+1} 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$+ \log_6 3^{2(n+1)} 2^{\frac{n(n+1)}{2}} + \cdots$$

$$+ \log_6 3^{n(n+1)} 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \log_6 3^{(n+1)(1+2+3+\cdots+n)} 2^{\frac{n(n+1)(n+1)}{2}}$$

$$= \log_6 3^{(n+1)\frac{n(n+1)}{2}} 2^{\frac{n(n+1)(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+1)}{2}$$

따라서 $S(n) \geq 210$ 이면

$$\frac{n(n+1)(n+1)}{2} \geq 210 \text{ 즉,}$$

$n(n+1)(n+1) \geq 420$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값은 7이다.

왜냐하면

$$n=7 \text{ 일 때, } 7 \times 8 \times 8 = 448 \geq 420$$

$$n=6 \text{ 일 때, } 6 \times 7 \times 7 = 294 < 420$$

이기 때문이다.

IX. 순열과 조합

19. 순열

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

집합 A 의 원소의 개수는 서로 다른 7개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 ${}_7P_2 = 7 \times 6 = 42$

집합 B 의 원소의 개수는 서로 다른 6개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 ${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$

집합 $A \cap B$ 의 원소의 개수는 4개의 자연수 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 2개의 수를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

따라서 $n(A \cup B) = 42 + 30 - 12 = 60$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 36

여학생 3명을 하나로 묶어 1명으로 생각하자. 남학생 3명을 포함한 4명이 원형의 탁자에 앉는 경우의 수는 $(4-1)!$

3명의 여학생이 모두 서로 이웃하여 앉은 자리의 내부에서 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 여학생 3명을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $3!$

따라서, 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $(4-1)! \times 3! = (3 \times 2) \times (3 \times 2) = 36$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ①

맨 앞자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 3의 3개

이고, 나머지 3개의 각 자리에 4개의 수 중 어느 하나를 놓는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

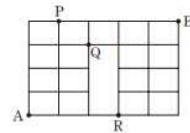
$${}_4\Pi_3 = 4^3$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $3 \times 4^3 = 192$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

다음 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 거쳐 이동하는 세 가지 경우로 나누어 생각하자.



(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow P$ 로 이동하는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!} = 5$

$P \rightarrow B$ 로 이동하는 경우의 수는 1 이므로 곱의 법칙에 의하여 $5 \times 1 = 5$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow Q$ 로 이동하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!3!} = 10$

$Q \rightarrow B$ 로 이동하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} = 4$ 이므로 곱의 법칙에 의하여 $10 \times 4 = 40$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 이동하는 경우

$A \rightarrow R$ 로 이동하는 경우의 수는 1

$R \rightarrow B$ 로 이동하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!4!} = 15$ 이

므로 곱의 법칙에 의하여 $1 \times 15 = 15$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $5 + 40 + 15 = 60$



EBS연계 기출분석 1

[정답] ⑤

$A \rightarrow P$ 일 때 최단거리로 가는 경우의 수

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

$P \rightarrow B$ 일 때 최단거리로 가는 경우의 수

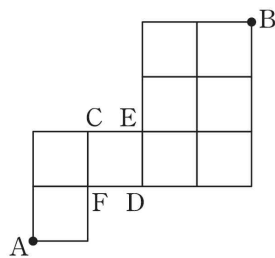
$$\frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

따라서 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 일 때 최단거리로 가는 경우의 수는 $6 \times 4 = 24$ 이다.



[정답] ⑤

다음 그림과 같이 C, D, E, F 지점을 정하면 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우는 다음 두 가지로 나눌 수 있다.



(i) C 지점을 거쳐 가는 경우

A 지점에서 C 지점까지 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

이 각각에 대하여 C 지점을 지나면 반드시 E 지점을 지나야 하므로 E 지점에서 B 지점으로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $3 \times 6 = 18$

(ii) D 지점을 거쳐 가는 경우

먼저 A 지점에서 F 지점으로 와야 하므로 이 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 D 지점에서 B 지점으로

가는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!2!} = 10$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $2 \times 10 = 20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $18 + 20 = 38$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ④

백의 자리에 올 수 있는 수는 0을 제외한 5개이고, 십의 자리와 일의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 백의 자리의 수를 제외한 5개의 수에서 서로 다른 2개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수 ${}_5P_2$ 와 같다.

따라서 세 자리 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여 $5 \times {}_5P_2 = 5 \times (5 \times 4) = 100$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

학생 4명이 먼저 앉고, 그 후 학생들 사이에 선생님이 앉는다고 생각하자.

학생 4명이 원형의 탁자에 앉는 경우의 수는 $(4-1)!$

남자선생님이 학생들 사이의 4곳 중 하나의 자리에 앉는 경우의 수는 4

이때 여자선생님 2명이 학생들 사이의 나머지 3곳 중 하나에 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는 $3 \times 2!$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $3! \times 4 \times (3 \times 2!) = (3 \times 2) \times 4 \times (3 \times 2) = 144$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤

서로 다른 종류의 선물 6개를 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 6개를 택한 후 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_6$

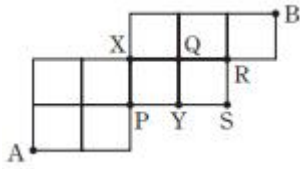
위의 경우의 수 중에는 1명에게만 선물을 나누어 주는 2가지의 경우의 수가 포함되어 있으므로 2명 모두에게 적어도 1개 이상 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2\Pi_6 - 2 = 2^6 - 2 = 62$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ⑤

정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하면 두 지점 A, B 사이의 최단거리는 8이다.



(i) X지점을 거쳐 B로 가는 경우

A→X로 이동하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!} = 6$

X→B로 이동하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} = 4$ 이므로

로 곱의 법칙에 의하여 $6 \times 4 = 24$

(ii) Y지점을 거쳐 B로 가는 경우

A→P→Y로 이동하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} \times 1 = 3$

Y→Q→B 또는 Y→S→R→B로 이동하는 경우의 수는 $\left(\frac{3!}{2!} \times 1\right) + (2! \times 1 \times 1) = 5$ 이므로

로 곱의 법칙에 의하여 $3 \times 5 = 15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $24 + 15 = 39$

20. 조합

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

A, B, C 중에서 2명을 뽑고 나머지 6명 중에서 3명을 뽑으면 된다.

A, B, C 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

A, B, C를 제외한 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3 \times 20 = 60$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

x, y, z, w 가 자연수이므로

음이 아닌 정수 x', y', z', w' 에 대하여

$$x = x' + 1, y = y' + 1, z = z' + 1, w = w' + 1$$

이라 하면, $x + y + z + 2w = 8$ 에서

$$(x' + 1) + (y' + 1) + (z' + 1) + 2(w' + 1) = 8$$

$$x' + y' + z' + 2w' = 3$$

w' 의 값에 따라 다음 경우로 나누어 생각하자.

(i) $w' = 0$ 일 때

방정식 $x' + y' + z' = 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(ii) $w' = 1$ 일 때

방정식 $x' + y' + z' = 1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_1 = {}_{3+1-1}C_1 = {}_3C_1 = 3$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 합의 법칙에 의하여 $10 + 3 = 13$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ⑤

x, y, z 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $x + y + z + 3w = 6$ 에서 $w < 2$ 이다.

(i) $w = 0$ 일 때

방정식 $x + y + z = 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

(i) $w = 1$ 일 때

방정식 $x + y + z = 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙

에 의하여 $28 + 10 = 38$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 32

조건 (나)에서

$a = a'd, b = b'd, c = c'd$ (a', b', c' 은 자연수)라 하면 조건 (가)에서 $(a' + b' + c' + 1)d = 20$ 이므로 d 는 20의 2 이상의 약수이다.

이때 $20 = 2^2 \times 5$ 이고, $a' + b' + c' + 1 \geq 4$ 이므로 d 가 될 수 있는 값은 2, 4, 5이다.

(i) $d = 2$ 일 때

$a = 2a', b = 2b', c = 2c'$ 이므로 주어진 방정식은 $2a' + 2b' + 2c' + 2 = 20$ 에서

$$a' + b' + c' = 9$$

이때 a', b', c' 은 자연수이므로

$a' = x + 1, b' = y + 1, c' = z + 1$ (x, y, z 는 음이 아닌 정수)라 하면 $x + y + z = 6$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

(ii) $d = 4$ 일 때

$a = 4a', b = 4b', c = 4c'$ 이므로 주어진 방정식은 $4a' + 4b' + 4c' + 4 = 20$ 에서

$$a' + b' + c' = 4$$

이때 a', b', c' 은 자연수이므로

$a' = x + 1, b' = y + 1, c' = z + 1$ (x, y, z 는 음이 아닌 정수)라 하면 $x + y + z = 1$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

(iii) $d = 5$ 일 때

$a = 5a', b = 5b', c = 5c'$ 이므로 주어진 방정식은 $5a' + 5b' + 5c' + 5 = 20$ 에서

$$a' + b' + c' = 3$$

이때 a', b', c' 은 자연수이므로 구하는 순서쌍의 개수는 1이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의

개수는 $28 + 3 + 1 = 32$

EBS연계 기출분석 1

[정답] 32

(가)조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍의 개수는 ${}_3H_7 = {}_9C_7 = 36$ 이다.

(나)에서 $2^a \times 4^b = 2^{a+2b}$ 이 $8 (= 2^3)$ 의 배수이므로 $a + 2b \geq 3$ 이다. 따라서 $a + 2b < 3$ 인 음이 아닌 정수 a, b 의 순서쌍은 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0)$ 으로 모두 4개이다(c 는 a, b 가 정해지면 따라 정해진다). 그러므로 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍의 개수는 $36 - 4 = 32$ 이다.

EBS교재

[정답] ②

w 의 값에 따라 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $w = 0$ 일 때,

주어진 방정식은 $x + y + z = 7$ 이고 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

(ii) $w = 1$ 일 때,

주어진 방정식은 $x + y + z = 2$ 이고 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 합의 법칙에 의해 $36 + 6 = 42$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 60

서로 다른 6개의 티셔츠에서 서로 다른 티셔츠 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

서로 다른 3개의 바지 중에서 2개를 택하

는 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

따라서 상의와 하의를 맞춰서 입을 수 있는
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
 $15 \times 3 = 60$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

비빔밥 1개를 포함시킨 것으로 생각하면
나머지 음식들은 서로 다른 5종류의 음식
중에서 6개를 주문하면 된다.

이 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을
허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와
같으므로 ${}_5H_6 = {}_{5+6-1}C_6 = {}_{10}C_6 = {}_{10}C_4$
 $= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

$(x+y+z+w)^5$ 의 전개식에서 문자 w 가 포
함되지 않은 서로 다른 항의 개수는
 $(x+y+z)^5$ 의 전개식에서 서로 다른
항의 개수와 같다. $(x+y+z)^5$ 을 전개한 식
에서 나타나는 각 항은 $x^p y^q z^r$ 꼴이고,
구하는 항의 개수는 $p+q+r=5$ 을 만족시
키는 음이 아닌 정수 p, q, r 의 모든 순서쌍
(p, q, r)의 개수와 같으므로 서로 다른 3개
에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복
조합의 수와 같다.

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ③

1, 2, 3, 4, 5, 6이 적혀 있는 6종류의 공 중에
서 중복을 허락하여 4개를 택하는 경우의
수는

$${}_6H_4 = {}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

홀수 1, 3, 5가 적혀 있는 3종류의 공 중에
서 중복을 허락하여 4개를 택하는 경우의

수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

따라서 구하는 경우의 수는 $126 - 15 = 111$

21. 이항정리와 분할

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ②

같은 종류의 공책 9권을 같은 종류의 가방
4개에 빈 가방이 없도록 남김없이 나누어
넣는 경우의 수는 자연수 9를 4개의 자연
수로 분할하는 경우의 수인 $P(9, 4)$ 와 같다.
자연수 9를 4개의 자연수로 분할하면

$$\begin{aligned} 9 &= 6+1+1+1 \\ &= 5+2+1+1 \\ &= 4+3+1+1 \\ &= 4+2+2+1 \\ &= 3+3+2+1 \\ &= 3+2+2+2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$P(9, 4) = 6$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

ㄱ. 자연수 6을 4개의 자연수의 합으로 나
타내면 $6 = 3+1+1+1 = 2+2+1+1$ 이므로
 $P(6, 4) = 2$ (참)

ㄴ. 자연수 6을 3개의 자연수의 합으로 나
타내면 $6 = 4+1+1 = 3+2+1 = 2+2+2$
이므로 $P(6, 3) = 3$. 이때 $P(6, 4) = 2$ 이므로
 $P(6, 3) > P(6, 4)$ (거짓)

ㄷ. 자연수 6을 3개의 자연수로 분할하는
수는 서로 같은 종류의 공 6개를 서로 같
은 종류의 주머니 3개에 빈 주머니가 없도
록 넣는 경우의 수와 같다.

이때 3개의 주머니에 각각 1개의 공을 넣
은 후, 남은 3개의 공을 1개의 주머니에
모두 넣거나 2개의 주머니에만 각각 1개
이상씩 넣거나 3개의 주머니에 각각 1개씩
넣는 경우의 수로 생각하면 되므로

$$P(6, 3) = P(3, 1) + P(3, 2) + P(3, 3) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

ㄴ. 자연수 3을 1개의 자연수의 합으로 나타내는 경우의 수는 1이므로 $P(3, 1) = 1$

자연수 3을 2개의 자연수의 합으로 나타내면 $3 = 2 + 1$ 이므로 $P(3, 2) = 1$

자연수 3을 3개의 자연수의 합으로 나타내면 $3 = 1 + 1 + 1$ 이므로 $P(3, 3) = 1$

이때 $P(6, 3) = 3$ 이므로

$$P(6, 3) = P(3, 1) + P(3, 2) + P(3, 3) \text{ (참)}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

$(ax + \frac{1}{x})^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (ax)^{5-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_5C_r \times a^{5-r} \times x^{5-r} \times x^{-r} \\ = {}_5C_r \times a^{5-r} \times x^{5-2r}$$

이다.

$(ax + \frac{1}{x})^5$ 의 전개식에서 x^3 항은 $5 - 2r = 3$,

즉 $r = 1$ 일 때이다. 이때 x^3 의 계수가 80이므로 ${}_5C_1 \times a^4 = 80$ 에서 $5a^4 = 80$, $a^4 = 16$

따라서 양수 a 의 값은 2이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

$(2x^2 + \frac{1}{x})^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (2x^2)^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_nC_r 2^{n-r} x^{2n-3r} \text{이므로}$$

상수항이 존재하려면 $2n - 3r = 0$,

즉 $2n = 3r \dots \dots \textcircled{1}$ 이어야 한다.

이때 2와 3은 서로소이므로 n 은 3의 배수이고 r 은 2의 배수이다. $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 3이다.

$n = 3$ 일 때 $r = 2$ 이므로 이때의 상수항은 ${}_3C_2 \times 2^{3-2} = 3 \times 2 = 6$

따라서 $a = 3$, $b = 6$ 이므로 $a + b = 9$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ②

$$1 + 1 + 1 + 5 = 8, 1 + 1 + 2 + 4 = 8,$$

$$1 + 1 + 3 + 3 = 8, 1 + 2 + 2 + 3 = 8,$$

$$2 + 2 + 2 + 2 = 8 \text{ 따라서 5가지이다.}$$

[다른 풀이]

$$P(8, 4) = P(4, 1) + P(4, 2) + P(4, 3) + P(4, 4) \\ = 1 + 2 + 1 + 1 = 5$$

EBS교재

[정답] ③

같은 종류의 공 8개를 같은 종류의 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 넣는 경우의 수는 자연수 8을 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같으므로 $P(8, 3)$ 이다.

자연수 8을 3개의 자연수로 분할하면 $8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1$

$$= 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2$$

따라서 구하는 경우의 수는 $P(8, 3) = 5$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ①

$x^2(x+a)^n$ 의 전개식에서 일반항이

$$x^2 \cdot {}_nC_r a^{n-r} x^r = {}_nC_r a^{n-r} x^{r+2} \text{이므로}$$

x^{n-1} 의 계수는 ${}_nC_{n-3} a^3$ 이다.

$$\text{따라서 } \boxed{\text{(가)}} = {}_nC_{n-3} = {}_nC_3 \dots \textcircled{1}$$

$a^2n = {}_nC_3 \times a^3 - 2a^2n$ 의 양변을 정리하면

$$a = \frac{18}{(n-1)(n-2)} \text{이므로}$$

$$\boxed{\text{(나)}} = (n-1)(n-2) \dots \textcircled{2}$$

a 가 자연수이고 n 은 4이상의 자연수이므로 $n = 4$ 이다.

$$\text{따라서 } \boxed{\text{(다)}} = 4 \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에 의해

$$f(n) = {}_nC_3, g(n) = (n-1)(n-2), k = 4$$

이다. 그러므로

$$f(4) + g(4) = {}_4C_3 + (4-1)(4-2) \text{이다.} \\ = 4 + 6 = 10$$



[정답] ④

$\left(ax^2 - \frac{1}{2x}\right)^7$ 의 전개식에서 일반항은

$$\begin{aligned} {}_7C_r (ax^2)^{7-r} \left(-\frac{1}{2x}\right)^r \\ = {}_7C_r \times a^{7-r} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^r \times x^{14-3r} \end{aligned}$$

이때 x^2 의 계수는 $14-3r=2$ 에서 $r=4$ 일 때이므로

$$\begin{aligned} {}_7C_4 \times a^{7-4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^4 &= {}_7C_3 \times a^3 \times \frac{1}{16} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times a^3 \times \frac{1}{16} \\ &= 140 \end{aligned}$$

$$a^3 = 64 \quad \therefore a = 4$$

따라서 양수 a 의 값은 4이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ②

서로 다른 지우개 6개를 서로 같은 필통 3개에 빈 필통이 없도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는 원소의 개수가 6인 집합을 공집합이 아닌 3개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수인 $S(6, 3)$ 과 같다.

이때 원소가 6개인 집합을 공집합이 아닌 3개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 방법은 세 부분집합의 원소의 개수가 각각 4, 1, 1 또는 3, 2, 1 또는 2, 2, 2인 세 가지 경우이다.

(i) 원소의 개수가 각각 4, 1, 1인 3개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우

$$\begin{aligned} {}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} &= {}_6C_2 \times {}_2C_1 \times \frac{1}{2!} \\ &= 15 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15 \end{aligned}$$

(ii) 원소의 개수가 각각 3, 2, 1인 3개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우

$$\begin{aligned} {}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 &= {}_6C_3 \times {}_3C_1 \times {}_1C_1 \\ &= 20 \times 3 \times 1 = 60 \end{aligned}$$

(iii) 원소의 개수가 각각 2, 2, 2인 3개의 서로

로소인 부분집합으로 분할하는 경우

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} = 15$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $15 + 60 + 15 = 90$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 2^{16}

$S(17, 1)$ 은 원소가 17개인 집합을 1개의 집합으로 분할하는 경우의 수이므로 $S(17, 1) = 1$
 $S(17, 2)$ 는 원소가 17개인 집합을 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 경우의 수이므로

$$\begin{aligned} S(17, 2) &= {}_{17}C_{16} \times {}_1C_1 + {}_{17}C_{15} \times {}_2C_2 + \cdots + {}_{17}C_9 \times {}_8C_8 \\ &= {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + {}_{17}C_3 + \cdots + {}_{17}C_8 \\ &= ({}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \cdots + {}_{17}C_8) - {}_{17}C_0 \\ &= 2^{16} - 1 \end{aligned}$$

따라서 $S(17, 1) + S(17, 2) = 1 + (2^{16} - 1) = 2^{16}$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ⑤

$(x^2 + \frac{1}{x})^9$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_9C_r (x^2)^{9-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_9C_r \times x^{18-3r}$$

따라서 상수항은 $18-3r=0$, 즉 $r=6$ 일 때이므로 구하는 상수항은 ${}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ②

서로 다른 연필 10자루에서 $2n$ 자루의 연필을 택하는 경우의 수는 $f(n) = {}_{10}C_{2n}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 f(k) &= \sum_{k=1}^5 {}_{10}C_{2k} \\ &= {}_{10}C_2 + {}_{10}C_4 + {}_{10}C_6 + {}_{10}C_8 + {}_{10}C_{10} \end{aligned}$$

이다. 이때

$${}_{10}C_0 + {}_{10}C_2 + \cdots + {}_{10}C_{10} = 2^{10-1} = 2^9 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^5 f(k) = {}_{10}C_2 + {}_{10}C_4 + {}_{10}C_6 + {}_{10}C_8 + {}_{10}C_{10}$$

$$= 2^9 - {}_{10}C_0 = 2^9 - 1 = 511$$

X. 확률

22. 확률

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

8명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 8!이고 양쪽 끝에 모두 남학생이 서는 사건을 A , 양쪽 끝에 모두 2학년 학생이 서는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A \cup B)$ 이다.

(i) 양쪽 끝에 모두 남학생이 서는 경우 남학생 5명 중 2명을 뽑아 양쪽 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_5P_2$, 남은 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 6!이므로 양쪽 끝에 모두 남학생이 서는 경우의 수는 ${}_5P_2 \times 6!$ 이다.

$$\text{따라서 } P(A) = \frac{{}_5P_2 \times 6!}{8!} = \frac{5}{14}$$

(ii) 양쪽 끝에 모두 2학년 학생이 서는 경우

2학년 학생 4명 중 2명을 뽑아 양쪽 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2$, 남은 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 6!이므로 양쪽 끝에 모두 2학년 학생이 서는 경우의 수는 ${}_4P_2 \times 6!$ 이다. 따라서

$$P(B) = \frac{{}_4P_2 \times 6!}{8!} = \frac{3}{14}$$

(iii) 양쪽 끝에 모두 2학년 남학생이 서는 경우

2학년 남학생 3명 중 2명을 뽑아 양쪽 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_3P_2$, 남은 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 6!이므로 양쪽 끝에 모두 2학년 남학생이 서는 경우의 수는 ${}_3P_2 \times 6!$ 이다.

$$\text{따라서 } P(A \cap B) = \frac{{}_3P_2 \times 6!}{8!} = \frac{3}{28}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{14} + \frac{3}{14} - \frac{3}{28} = \frac{13}{28}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ①

서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때 나올 수 있는 경우의 수는 $6 \times 6 \times 6 = 216$ 나오는 세 눈의 수의 곱 중에서 소수는 2, 3, 5이고 이 중 3, 5는 홀수이므로 나오는 세 눈의 수의 곱이 2인 사건을 A , 홀수인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A \cup B)$ 이다.

(i) 나오는 세 눈의 수의 곱이 2인 경우 $2 = 2 \times 1 \times 1$ 이므로 세 눈의 수의 곱이 2가 되는 경우의 수는 3이다.

$$\text{따라서 } P(A) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$$

(ii) 나오는 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우 세 눈의 수의 곱이 홀수하려면 세 눈이 모두 홀수이어야 하므로 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ 따라서 } P(B) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

(i), (ii)에서 두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{72} + \frac{1}{8} = \frac{5}{36}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ⑤

8명의 학생 중에서 임의로 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

적어도 1명의 여학생이 포함되게 뽑는 사건을 A 라 하면 A 의 여사건 A^c 은 남학생만 3명을 뽑는 사건이다.

남학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4 \text{ 이므로 } P(A^c) = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ③

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때 나올 수 있는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 짝수인 사건을 A , 소수인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A \cup B)$ 이다.

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 이므로 사건 $(A \cup B)^c$ 은 눈의 수의 합이 9인 사건이다.

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b 라 하고 순서쌍 (a, b) 로 나타내면 $a + b = 9$ 인 경우는 $(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$ 의 4개이므로

$$P((A \cup B)^c) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$



EBS연계 기출분석 1

[정답] ⑤

$$P(A \cap B^c) = P(A - B) = \frac{3}{16} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A - B) + P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$



EBS교재

[정답] ③

갑과 을이 카드를 뽑는 모든 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_1 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 2 = 12$$

갑이 뽑은 카드의 수를 (a, b) 로 나타내면

(i) 갑이 뽑은 카드의 수가 $(1, 2)$ 인 경우 을이

3 또는 4를 뽑으면 된다.

(ii) 갑이 뽑은 카드의 수가 $(1, 3)$ 인 경우 을이 4를 뽑으면 된다.

(iii) 갑이 뽑은 카드의 수가

$(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$ 중 하나인 경우 을이 어떤 카드를 뽑더라도 갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 수의 곱보다 더 작게 된다.

(i)인 사건을 A , (ii)인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A \cup B)$ 이다. 이때

$$P(A) = \frac{1 \times 2}{12} = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1 \times 1}{12} = \frac{1}{12}$$

이고 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ③

택한 카드에 적힌 수가 4의 배수인 사건을 A , 5의 배수인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A \cup B)$ 이다.

$$P(A) = \frac{7}{30}, P(B) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

이때 30장의 카드 중 20의 배수가 적힌 카드는 1장이므로 택한 카드에 적힌 수가 3의 배수이면서 4의 배수일 확률은 $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{7}{30} + \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ③

5개의 공 중에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

3개의 공에 적혀 있는 세 수의 합이 4 이상 8 이하인 사건을 A 라 하면 A 의 여사건 A^c 은 3개의 공에 적혀 있는 세 수의 합이

3 이하이거나 9 이상인 사건이다.
 3개의 공에 적혀 있는 세 수를 $a, b, c (a < b < c)$
 라 하고 순서쌍 (a, b, c) 로 나타내면
 $a + b + c = 3$ 은 $(0, 1, 2)$ 의 1가지
 $a + b + c = 9$ 은 $(2, 3, 4)$ 의 1가지
 이므로 3개의 공에 적혀 있는 세 수의 합이
 3 이하이거나 9 이상인 경우의 수는 2이다.

$$P(A^c) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

9개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

노란 공 4개 중에서 2개, 빨간 공 5개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_5C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 60$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{126} = \frac{10}{21}$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ④

두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이므로
 $P(A \cap B) = 0$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 에서

$$P(A) + P(B) = \frac{3}{5} \dots\dots ㉠$$

$$P(A) - P(B) = \frac{1}{5} \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 두 식을 변끼리 더하면

$$2P(A) = \frac{4}{5}, P(A) = \frac{2}{5}$$

따라서 $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

23. 조건부확률

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ④

100명의 학생 중 임의로 선택한 한 학생이
 자연과학특강을 신청한 학생일 사건을 A ,
 여학생일 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}, P(A \cap B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{20}} = \frac{2}{9}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] 30

A부서에 속해 있는 직원 20명의 50%가 여
 성이므로 A부서의 남자 직원과 여자 직원은
 각각 10명씩이다. 또한 이 회사의 여성
 직원의 수를 n 명이라 하면 B부서에 속해
 있는 여성 직원의 수는 $0.6n$ 명이다. 따라서
 직원 60명을 두 부서 A, B와 남자, 여자로
 나누어 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

	A부서	B부서	계
남자	10		
여자	10	$0.6n$	n
계	20	40	60

$$n = 10 + 0.6n \text{에서 } n = 25$$

임의로 택한 직원이 B부서에 속해 있는 사
 건을 E , 여성 직원인 사건을 F 라 하면

$$P(E) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3},$$

$$P(E \cap F) = \frac{0.6n}{60} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

구하는 확률은

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}$$

따라서 $p = \frac{3}{8}$ 이므로 $80p = 80 \times \frac{3}{8} = 30$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ⑤

두 주머니 A, B에서 홀수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 각각 X, Y 라 하고 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 짝수일 사건

을 Z 라 하면 그 여사건 Z^c 은 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 홀수인 사건이다.

두 주머니 A, B에서 각각 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 모두 홀수가 적힌 공을 꺼내는 사건은 X, Y 이고 두 사건 X, Y 가 서로 독립이므로 $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$ 이다.

$P(X) = \frac{3}{5}$, $P(Y) = \frac{2}{5}$ 이고 두 수의 곱이 홀수이려면 두 수가 모두 홀수이어야 하므로

$$P(Z^c) = P(X)P(Y) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(Z) = 1 - P(Z^c) = 1 - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ①

A가 5번째 게임을 한 후 상금을 모두 가져가려면 5번째 게임에서 3번째로 이기면 되므로 앞의 4번의 게임에서 2번을 이기고 2번은 지면된다. A가 한 번의 게임에서 이길 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고 질 확률은 $\frac{2}{3}$ 이므로 구

하는 확률은 $\left\{ {}_4C_2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right\} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ①

주사위를 한 번 던질 때 4의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다. 따라서 한 개의 주사위를 3번 던질 때 4의 눈이 한 번만 나올 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{25}{72} \text{ 이다.}$$

EBS교재

[정답] 15

한 개의 동전을 8번 던질 때, 앞면이 n 번

나올 확률은 ${}_8C_n \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\frac{1}{2} \right)^{8-n} = {}_8C_n \left(\frac{1}{2} \right)^8$

$${}_8C_n \left(\frac{1}{2} \right)^8 = \frac{7}{32} \text{ 에서 } {}_8C_n = 56$$

$$\text{이때 } 56 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = {}_8C_3 \text{ 이므로}$$

$${}_8C_n = {}_8C_3 \text{ 또는 } {}_8C_n = {}_8C_5$$

따라서 $n=3$ 또는 $n=5$ 이므로 모든 자연수 n 의 값의 곱은 $3 \times 5 = 15$

EBS연계 기출분석 2

[정답] ③

체험 학습 B를 선택한 학생 중 남학생 수와 여학생 수를 각각 x, y 라 하자. 문제에서 주어진 정보를 표를 이용하여 정리해 보면 아래와 같다.

	체험학습 A	체험학습 B	계
남	90	x	$90 + x$
여	70	y	$70 + y$
계	160	200	360

이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명의 학생이 체험학습 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은 $\frac{x}{200}$ 이므로, $\frac{x}{200} = \frac{2}{5}$ 에서 $x=80$ 이고 $y=120$ 이다. 따라서 여학생의 수는 $70 + 120 = 190$ 이다.

EBS교재

[정답] ⑤

회원 10명 중 임의로 선택한 세 명이 모두 같은 중학교를 졸업한 회원인 사건을 X , 모두 A 중학교를 졸업한 회원인 사건을 Y , 모두 B 중학교를 졸업한 회원인 사건을 Z 라 하면

$$P(Y) = \frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{6}, P(Z) = \frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{30}$$

$$P(X) = P(Y \cup Z) = P(Y) + P(Z) \\ = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5}$$

한편, $P(Y \cap X) = P(Y)$ 이므로 구하는 조건부 확률 $P(Y|X)$ 는

$$P(Y|X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$$

● ● EBS연계 기출분석 3

[정답] ①

두 사건 A, B 가 독립이므로

$$\frac{1}{9} = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times P(B)$$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

● ● EBS교재

[정답] ⑤

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) \\ = \frac{13}{16} \text{ 이므로 } P(A \cap B) = \frac{3}{16} \dots\dots \textcircled{7}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3}P(B)P(B)$$

$$= \frac{1}{3}(P(B))^2 \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } \frac{1}{3}(P(B))^2 = \frac{3}{16}, (P(B))^2 = \frac{9}{16}$$

$$0 < P(B) < 1 \text{ 이므로 } P(B) = \frac{3}{4}$$

● ● EBS연계 기출분석 4

[정답] 43

$(m, n) = (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$ 중에서 $2m \geq n$ 을 만족하는 것은 $(3, 0), (2, 1), (1, 2)$ 이다.

$$\text{i) } m=3, n=0 \text{ 일 때 } \frac{{}_3C_3 \times {}_4C_0}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$$

$$\text{ii) } m=2, n=1 \text{ 일 때 } \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_1}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$$

$$\text{iii) } m=1, n=2 \text{ 일 때 } \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_2}{{}_7C_3} = \frac{18}{35}$$

i), ii), iii)에서 꺼낸 흰 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{12}{35}$ 이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{12}{35}}{\frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35}} = \frac{12}{31} \text{ 이므로 } p=31, q=12$$

이다. 즉, $p+q=43$

● ● EBS교재

[정답] ④

주머니 A, B에서 뽑은 공이 각각 흰 공, 검은 공인 사건을 X , 주머니 A, B에서 뽑은 공이 각각 검은 공, 흰 공인 사건을 Y , 주머니 A, B에서 뽑은 공이 서로 다른 색인 사건을 Z 라 하면

$$P(X) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_3C_1 \times {}_5C_1} = \frac{6}{15}$$

$$P(Y) = \frac{{}_1C_1 \times {}_2C_1}{{}_3C_1 \times {}_5C_1} = \frac{2}{15}$$

$$\text{이므로 } P(Z) = P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) \\ = \frac{6}{15} + \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$

한편, $P(X \cap Z) = P(X)$ 이므로 구하는 조건부 확률 $P(X|Z)$ 는

$$P(X|Z) = \frac{P(X \cap Z)}{P(Z)} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{4}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 /

[정답] ②

동전을 던져서 앞면이 나오는 사건을 A , 주머니에서 흰 공을 꺼내는 사건을 B 라 하자.

(i) 동전을 던져서 앞면이 나오는 경우

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나올 확률은 $P(B|A) = \frac{4}{7}$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

(ii) 동전을 던져서 뒷면이 나오는 경우

(ii) 동전을 던져서 뒷면이 나오는 경우

$$P(A^C) = \frac{1}{2}$$

주머니에 검은 공 1개를 넣은 후 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나올 확률은

$$P(B|A^C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A^C \cap B) = P(A^C)P(B|A^C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(i), (ii)에서 P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) \\ = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{15}{28}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ⑤

갑이 흰 공을 꺼내는 사건을 A , 을이 검은 공을 꺼내는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$ 이다. 이때

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) \\ = P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C) \\ = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{15}{56} + \frac{20}{56} = \frac{35}{56}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{35}{56}} = \frac{3}{7}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ①

5개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 5개의 동전이 모두 같은 면이 나오는 사건을

$$A \text{라 하면 } P(A) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

따라서 2회의 독립시행에서 사건 A 가 1회 일어날 확률은

$${}_2C_1 \left(\frac{1}{16}\right) \times \left(\frac{15}{16}\right) = 2 \times \frac{15}{256} = \frac{15}{128}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] ③

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져

나온 눈의 수가 같은 사건을 A 라 하고, 주어진 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 C 라 하자.

(i) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 같은 경우

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$P(C|A)$ 는 동전을 6번 던져서 앞면이 3번, 뒷면이 3번 나오는 확률이므로

$$P(C|A) = {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{16}$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C|A) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{16} = \frac{5}{96}$$

(ii) 서로 다른 2개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 다른 경우

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$P(C|A^C)$ 은 동전을 4번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나오는 확률이므로

$$P(C|A^C) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

$$P(A^C \cap C) = P(A^C)P(C|A^C) = \frac{5}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(C) = P(A \cap C) + P(A^C \cap C) = \frac{5}{96} + \frac{5}{16} = \frac{35}{96}$$

XI. 통계

24. 이산확률분포

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ①

확률의 총합이 1이므로

$$a + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + b = 1 \quad a + b = \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$E(X^2) = 1$ 에서

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= (-1)^2 \times a + 0^2 \times \frac{1}{4} \\
 &\quad + (1)^2 \times \frac{1}{2} + (2)^2 \times b \\
 &= a + \frac{1}{2} + 4b = 1 \\
 a + 4b &= \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{L}
 \end{aligned}$$

①, ②에서 $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{12}$ 따라서

$$\begin{aligned}
 E(X) &= (-1) \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{4} \\
 &\quad + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ⑤

확률변수 X 에 대하여

$$P(X=k) = {}_{90}C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{90-k}$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, 90)$$

이러 하면 X 는 이항분포 $B(90, \frac{1}{3})$ 을 따르

므로

$$E(X) = 90 \times \frac{1}{3} = 30$$

$$V(X) = 90 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 20$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 20 + 30^2 = 920$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^{90} (k^2 + 3) \cdot {}_{90}C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{90-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{90} k^2 \times {}_{90}C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{90-k} \\
 &\quad + 3 \sum_{k=0}^{90} {}_{90}C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{90-k} \\
 &= E(X^2) + 3 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{90} \\
 &= 920 + 3 \times 1 \\
 &= 923
 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

확률의 총합은 1이므로

$$c + 2c + 3c + \dots + nc = 1$$

$$\text{에서 } c(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{n(n+1)c}{2} = 1$$

$$\text{따라서 } c = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x=1}^n x \cdot cx = c \sum_{x=1}^n x^2 \\
 &= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{2n+1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{x=1}^n x^2 \cdot cx = c \sum_{x=1}^n x^3 \\
 &= \frac{2}{n(n+1)} \times \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{따라서 } V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 \\
 &= \frac{9n^2 + 9n - 2(4n^2 + 4n + 1)}{18} \\
 &= \frac{n^2 + n - 2}{18} = 1
 \end{aligned}$$

$$V(X) = 1 \text{에서 } \frac{n^2 + n - 2}{18} = 1$$

$$n^2 + n - 20 = 0 \quad (n+5)(n-4) = 0$$

n 은 자연수이므로 $n = 4$ 이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] 768

확률변수 X 가 가지는 값이

$2, 2^2, 2^3, \dots, 2^9, 2^{10}$ 이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	2^2	$\dots$	2^9	2^{10}	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\dots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^9$	a	1

확률의 총합이 1이므로

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + a = 1 \\
 &\frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} + a = 1
 \end{aligned}$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 + a = 1 \quad \text{따라서} \quad a = \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$E(X^2) = 2^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) + (2^2)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+ (2^3)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$+ \dots + (2^9)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 + (2^{10})^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9) + 2^{11}$$

$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} + 2^{11}$$

$$= 2^{11} + 2^{10} - 2$$

$$= 2^{11} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 2$$

$$= \frac{3}{2} \times 2^{11} - 2$$

에서 $b = \frac{3}{2}$ 따라서 $\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \times 2^9 = 768$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] 4

철수가 이 게임을 연속으로 두 번 하였을 때,
나올 수 있는 경우는

(앞면, 앞면), (앞면, 뒷면), (뒷면, 앞면),
(뒷면, 뒷면) 의 4 가지이므로 $a = 2$ 또는
 $a = 3$ 또는 $a = 4$

이 때, $X = |3 - a|$ 이므로

$a = 2$ 또는 $a = 4$ 일 때, $X = 1$ 이고

$$P(X=1) = \frac{1}{2}$$

$a = 3$ 일 때, $X = 0$ 이고 $P(X=0) = \frac{1}{2}$

따라서 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 4$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 8

한 개의 주사위를 4회 던졌을 때, 짝수의 눈
이 나온 횟수를 a , 홀수의 눈이 나온 횟수를 b
라 하면 순서쌍 (a, b) 는

$(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$

이때, $X = |a - b|$ 이므로

(i) $X = 0$ 일 때, (a, b) 는 $(2, 2)$ 이므로

$$P(X=0) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

(ii) $X = 2$ 일 때, (a, b) 는 $(1, 3)$ 또는 $(3, 1)$
이므로

$$P(X=2) = {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 = \frac{1}{2}$$

(iii) $X = 4$ 일 때, (a, b) 는 $(0, 4)$ 또는 $(4, 0)$
이므로

$$P(X=4) = {}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	2	4	계
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(2X+5) = 2E(X) + 5 = 2 \times \frac{3}{2} + 5 = 8$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] 156

주사위를 한 번 던졌을 때, 점 P 의 좌표를
확률변수 X 라 하면 $X = 2, 4, 6, -4$ 이고,
 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	4	6	-4	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X) = (2 + 4 + 6) \times \frac{1}{6} + (-4) \times \frac{1}{2} = 0$$

$$V(X) = (2^2 + 4^2 + 6^2) \times \frac{1}{6} + (-4)^2 \times \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{52}{3}$$

$$V(3X) = 9V(X) = 9 \times \frac{52}{3} = 156$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 11

[게임1]에서 당첨될 확률은 $\frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$ 이고,

[게임2]에서 당첨될 확률은 $\frac{6}{2^5} = \frac{3}{16}$ 이므로 두

확률변수 X, Y 는 각각 이항분포

$B\left(20, \frac{1}{12}\right), B\left(n, \frac{3}{16}\right)$ 을 따른다.

한편, (Y 의 표준편차) > (X 의 표준편차)

이면 (Y 의 분산) > (X 의 분산)이므로

$$n \times \frac{3}{16} \times \frac{13}{16} > 20 \times \frac{1}{12} \times \frac{11}{12}$$

$$\therefore n > \frac{16 \times 16 \times 20 \times 11}{3 \times 13 \times 12 \times 12}$$

$$= \frac{3520}{351}$$

$$= 10.02 \times \times \times$$

따라서, 구하는 최솟값은 11 이다.

25. 정규분포

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ⑤

$f(x)$ 가 확률밀도함수이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

$$\frac{1}{2} \times 1 \times a + 2 \times a + \frac{1}{2} \times 3 \times a = 1$$

$$4a = 1$$

$$a = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률 $P(|X| \leq 2)$ 는

$$P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2)$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) \times 2$$

$$= \frac{5}{6}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ④

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x = m$ 에 대하여 대칭이므로 $P(X \geq a+4) = 0.0668$ 의 값이 최대일 때는 $a-2$ 와 $a+4$ 의 평균이 m 일 때이다.

$$\text{즉, } \frac{(a-2) + (a+4)}{2} = \frac{2a+2}{2} = a+1 = m$$

에서 $a = m-1$

$P(X \geq a+4) = 0.0668$ 에서

$$P(X \geq a+4) = P(X \geq m-1+4)$$

$$= P(X \geq m+3)$$

$$= 0.5 - P(m \leq X \leq m+3)$$

$$= 0.0668$$

$$P(m \leq X \leq m+3) = 0.5 - 0.0668$$

$$= 0.4332$$

이때 $P(m \leq X \leq m+1.5\sigma) = 0.4332$ 이므로

$$m+3 = m+1.5\sigma$$

$$1.5\sigma = 3$$

따라서 $\sigma = 2$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ②

어느 공장에서 생산하는 A 연필의 길이를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(175, 4^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-175}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}
& P(171 \leq X \leq 181) \\
&= P\left(\frac{171-175}{4} \leq Z \leq \frac{181-175}{4}\right) \\
&= P(-1 \leq Z \leq 1.5) \\
&= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\
&= 0.3413 + 0.4332 \\
&= 0.7745
\end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ⑤

확률분포 X 는 이항분포 $B(48, p)$ 를 따른다.

$V(-3X+2) = 81$ 에서

$V(-3X+2) = (-3)^2 V(X) = 81$ 이므로

$$V(X) = 9$$

$V(X) = 48 \times p(1-p) = 9$ 에서

$$p(1-p) = \frac{9}{48} = \frac{3}{16}$$

$$16p^2 - 16p + 3 = 0$$

$$(4p-1)(4p-3) = 0$$

$0 < p < \frac{1}{2}$ 이므로 $p = \frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(48, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 48 \times \frac{1}{4} = 12, \quad V(X) = 9 = 3^2$$

이때 48은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(12, 3^2)$ 을 따르고,

$$Z = \frac{X-12}{3}$$

로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 15) &= P\left(Z \geq \frac{15-12}{3}\right) \\
&= P(Z \geq 1) \\
&= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) \\
&= 0.5 - 0.3413 \\
&= 0.1587
\end{aligned}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ③

(i) $m < 10$ 인 경우

$f(10) > f(20)$ 이므로 $f(4) > f(22)$ 이므로 조건(나)에 모순이 된다.

(ii) $10 \leq m < 20$ 인 경우

조건(가)에서 $f(10) > f(20)$ 이므로

$m-10 < 20-m$ 이다. 즉, $m < 15$ 이다.

조건(나)에서 $f(4) > f(22)$ 이므로

$m-4 > 22-m$ 이다. 즉, $m > 13$

이다. 따라서

$$13 < m < 15$$

이고 m 이 자연수 이므로

$$m = 14$$

이다. 따라서

$P(17 \leq X \leq 18)$

$$= P\left(\frac{17-14}{5} \leq Z \leq \frac{18-14}{5}\right)$$

$$= P(0.6 \leq Z \leq 0.8)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.8) - P(0 \leq Z \leq 0.6)$$

$$= 0.288 - 0.226 = 0.062$$

EBS교재

[정답] 27

(i) $m < 10$ 이므로 자연수 m 의 값은 1, 2, 3, ..., 9이고, 그 개수는 9이다.

(ii) $\sigma < 4$ 이므로 자연수 σ 의 값은 1, 2, 3이고, 그 개수는 3이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$9 \times 3 = 27$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 1

[정답] ⑤

150명 중 축구 경기를 시청한 사람의 수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포

$B(150, 0.6)$ 을 따른다.

$$E(X) = 150 \times 0.6 = 90$$

$$V(X) = 150 \times 0.6 \times 0.4 = 36$$

이때, $n = 150$ 은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 정규분포 $N(90, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
P(X \leq 99) &= P\left(\frac{X-90}{6} \leq \frac{99-90}{6}\right) \\
&= P(Z \leq 1.5)
\end{aligned}$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 + 0.4332 = 0.9332$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] ④

구하는 값은 이산확률변수 X 가 이항분포

$B\left(72, \frac{1}{3}\right)$ 을 따를 때의 확률

$P(20 \leq X \leq 30)$ 을 의미한다.

$$E(X) = 72 \times \frac{1}{3} = 24$$

$$\sigma(X) = \sqrt{72 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = 4$$

이고

$n=72$ 는 충분히 큰 수 이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(24, 4^2)$ 을 따른다.

$$P(20 \leq X \leq 30)$$

$$= P\left(\frac{20-24}{4} \leq Z \leq \frac{30-24}{4}\right)$$

$$= P(-1.0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.34 + 0.43 = 0.77$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

$f(3+x) = f(3-x)$ 에서 확률밀도함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고, $P(1 \leq X \leq 5) = 1$ 이므로

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(3 \leq X \leq 5) = \frac{1}{2}$$

$$P(3 \leq X \leq 4) = P(2 \leq X \leq 3) = \frac{1}{5}$$

$$P(1 \leq X \leq 4)$$

$$= P(1 \leq X \leq 3) + P(3 \leq X \leq 4)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 4

[정답] 504

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(1458, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 1458 \cdot \frac{1}{3} = 486$$

$$V(X) = 1458 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 324$$

따라서 X 는 근사적으로 정규분포

$N(486, 18^2)$ 을 따른다.

이 때, $Z = \frac{X-486}{18}$ 으로 놓으면 Z 는

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$P(X \geq k) = 0.1587$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{k-486}{18}\right) = 0.1587$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-486}{18}\right)$$

$$= 0.1587$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-486}{18}\right) = 0.1587$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-486}{18}\right) = 0.3413$$

이 때, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{k-486}{18} = 1$$

$$k - 486 = 18$$

$$k = 504$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 5

[정답] 0.02

짝수의 눈이 나오는 횟수를 X 라 하면 홀수의 눈이 나오는 횟수는 $100 - X$ 이므로

$$2X - (100 - X) \geq 80$$

$$3X \geq 180$$

$$X \geq 60$$

이때 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$V(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$$

따라서 X 는 근사적으로 정규분포

$N(50, 5^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{X-50}{5}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정

표분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &= P\left(Z \geq \frac{60-50}{5}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 < Z < 2) \\ &= 0.5 - 0.48 \\ &= 0.02 \end{aligned}$$

26. 통계적 추정

2018수능대비 EBS 대표 예제 1

[정답] ③

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + a = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$E(\bar{X}) = E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3}$$

$$\text{따라서 } aE(\bar{X}) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

[정답] ②

이 고등학교에 재학 중인 학생들이 등교하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(50, 15^2)$ 을 따른다. 이 고등학교에 재학 중인 학생들 중에서 임의추출한 25명의 학생들이 등교하는 데 걸리는 시간의 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하면 $E(\bar{X}) = 50$, $\sigma(\bar{X}) = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$ 이므로 확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(50, 3^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 50}{3}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \text{따라서 } P(\bar{X} \geq 56) &= P\left(Z \geq \frac{56-50}{3}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

[정답] ③

표본의 크기 $n = 100$, 표본평균의 값 $\bar{x} = 500$, 표본표준편차 $s = 15$ 이고 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 표본표준편차 s 를 모표준편차 σ 대신 사용할 수 있다.

따라서 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$500 - 2.58 \frac{15}{\sqrt{100}} \leq m \leq 500 + 2.58 \frac{15}{\sqrt{100}}$$

$$500 - 2.58 \times \frac{3}{2} \leq m \leq 500 + 2.58 \times \frac{3}{2}$$

$$500 - 3.87 \leq m \leq 500 + 3.87$$

$$496.13 \leq m \leq 503.87$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

[정답] ④

$$E(\hat{p}) = 0.7 \quad V(\hat{p}) = \frac{0.7 \times 0.3}{2100} = 0.01^2 \quad \text{이므로}$$

확률변수 $\hat{p}$ 은 정규분포 $N(0.7, 0.01^2)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.7}{0.01} \text{로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준}$$

정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} &P(0.69 \leq \hat{p} \leq 0.72) \\ &= P\left(\frac{0.69-0.7}{0.01} \leq Z \leq \frac{0.72-0.7}{0.01}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 \\ &= 0.8185 \end{aligned}$$

EBS연계 기출분석 1

[정답] ③

정규분포 $N(0, 4^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\bar{X}$ 이므로 확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(0, \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$ 을 따른다. 정규분포 $N(3, 2^2)$ 을

따르는 모집단에서 크기가 16 인 표본을 임의 추출하여 구한 표본평균이 $\bar{Y}$ 이므로 확률변수 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \geq 1) = P(\bar{Y} \leq a)$$

에서

$$P\left(Z \geq \frac{1-0}{\frac{4}{3}}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-3}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$P\left(Z \geq \frac{3}{4}\right) = P(Z \leq 2(a-3))$$

이고, 식이 성립하기 위해서는 $\frac{3}{4}$ 과 $2(a-3)$ 은 크기가 같고 부호가 반대이다. 즉,

$$\frac{3}{4} + 2(a-3) = 0$$

이다. 따라서 $a = \frac{21}{8}$ 이다.

EBS교재

[정답] ④

확률변수 X 가 정규분포 $N(100, 6^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-100}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 112) = P\left(\frac{X-100}{6} \leq \frac{112-100}{6}\right)$$

$$= P(Z \leq 2) \dots \dots \textcircled{1}$$

한편, $E(\bar{X}) = 100$, $V(\bar{X}) = \frac{6^2}{9} = 4 = 2^2$ 이므로 확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(100, 2^2)$ 을 따르고 $Z = \frac{\bar{X}-100}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \geq a) = P\left(\frac{\bar{X}-100}{2} \geq \frac{a-100}{2}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{a-100}{2}\right) \dots \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\frac{a-100}{2} = -2$$

따라서 구하는 상수 a 의 값은 96이다.

EBS연계 기출분석 2

[정답] ④

신뢰도 99%의 신뢰구간을

$\bar{x} - c \leq m \leq \bar{x} + c$ 라 할 때, c 는 표본평균과 모평균의 차이의 최댓값이다.

따라서 $c = 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{64}} = 12.9$ 이다.

EBS교재

[정답] ②

모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}}$$

따라서 c 의 값은

$$c = 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}} = 2.58 \times \frac{1}{2} = 1.29$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 /

[정답] ①

표본평균을 $\bar{X}$ 라 하면 $\sigma = 8$ 이므로 신뢰구간은

$$\bar{X} - 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{n}}$$

$$\beta - \alpha = 2 \times 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{n}} \leq 8$$

$$\sqrt{n} \geq 3.92$$

$$n \geq 3.92^2 = 15.3664$$

따라서 구하는 n 의 최솟값은 16 이다.

2018수능대비 EBS연계 예상문항 2

[정답] 75

모비율 p 에 대한 신뢰구간은

$$\left[\hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}, \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}} \right]$$

이때 주어진 신뢰구간이 $[0.201, 0.299]$ 이므로

$$2 \times 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}} = 0.299 - 0.201$$

$$= 0.098$$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}} = \frac{1}{40}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\hat{p}(1-\hat{p}) = \frac{3}{16}$$

$$\hat{p} = \frac{1}{4} \quad \text{또는} \quad \hat{p} = \frac{3}{4}$$

그런데 $0.201 \leq \hat{p} \leq 0.299$ 이므로 $\hat{p} = \frac{1}{4}$

표본 300명 중에서 특정한 제품을 선호하는 사람의 수가 n 이므로

$$\hat{p} = \frac{n}{300} = \frac{1}{4}$$

$$n = 75$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ④

크기가 4인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$N\left(20, \left(\frac{2}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$, 즉 $N(20, 1^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 18) &= P(Z \geq -2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(Z \geq 0) \\ &= 0.4772 + 0.5 = 0.9772 \end{aligned}$$

2018수능대비 EBS연계 예상문항 3

[정답] ②

확률의 합은 1 이므로

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + a + \frac{1}{10} = 1$$

$$a = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 6 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{20}{5} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 2^2 \cdot \frac{2}{5} + 4^2 \cdot \frac{3}{10} + 6^2 \cdot \frac{1}{5} \\ &\quad + 8^2 \cdot \frac{1}{10} - 4^2 \\ &= 20 - 16 = 4 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = 2$$

표본의 크기가 16 이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$