2018 수능 대비 EBS 연계 장학자료

수 학 (나형)

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

일 러 두 기

2018학년도 대학수학능력시험에서도 EBS 수능교재 연계 비율이 70% 로 유지될 전망입니다. 이 점을 감안하면 EBS 교재의 철저한 학습이 수능 고득점에 결정적인 역할을 할 것이라고 확신합니다. 이 장학 자료는 2017학년도 대학수학능력시험과 2018학년도 대학수학능력시험 모의평가인 6월 평가 문제에서 EBS연계문항이 어떻게 변형되어 출제되었는지 분석 제시함으로써 EBS연계에 대한 적응력을 높이도록 하였습니다. 또한 2018학년도 실제 수능시험을 두 달 남짓 남겨 둔 고3 수험생들에게 많은 분량의 EBS 수능교재를 효율적으로 정리하고, 나아가 실전에 대비하여 꼭 알아야 할 대표 문제 유형을 익히는데 도움을 주고자 하는 취지에서 출제 가능성이 높을 것으로 예상되는 EBS수능교재(수능특강, 수능완성)의 단원별 문항을 선정하여 제시하였고, 이를 변형한 문항을 통해 시험에 대비할 수 있도록 제작하였습니다.

이 교재의 특징을 요약하면 다음과 같습니다.

첫째, 본문과 정답 및 해설로 구성되어 있습니다.

둘째, 구성내용은 단원별 기출문항들을 분석하고 이에 따른 수능대비법을 제시하였습니다.

셋째, EBS연계교재인 수능특강과 수능완성에서 각 단원별로 기본적인 내용을 포함하면서 각 단원에서 자주 출제되는 대표예제를 선정하여 문항분석 및 기본개념을 학습하도록 구성하였습니다.

넷째, 2017학년도 대학수학능력시험 수학(나) 영역의 출제 문항 중 EBS연계교재 문항을 선정하고, EBS연계교재의 변형 전 문항과 변형 후 문항을 비교 분석하여 어떻게 변형되어 출제되고 있는 지 설명하였고, 문제 해결 전략을 제시함으로써 학생들이 쉽게 접근할 수 있도록 하였습니다. 기출문제 분석을 통해 EBS연계 유형을 익히도록 하고, 각 문항에서 중요하게 다루어지는 개념을 정리하였습니다. 또한 기출문제 분석을 통해 EBS연계 유형을 익히도록 하고, 각 문항에서 중요하게 다루어지는 개념을 정리하였습니다.

다섯째, 2018학년도 대학수학능력시험에 출제가 예상되는 EBS연계교재 문항을 선정하고, 이를 변형한 문항들을 제시함으로써 실전에 대비하도록 하였습니다.

이 교재는 EBS연계교재의 모든 내용을 수록하지 못하였지만 각 단원에서 꼭 챙겨야하는 개념위주로 문항을 구성하여 EBS연계 문항을 대비하는 수험생들에게 작은 도움이 되고자 하는 마음으로 제작하였습니다. 본 교재에 제시된 유형이외에도 중요한 수학적 개념을 담고 있는 여러 유형의 문제들을 통해 부족한 부분을 보충하시기 바랍니다.

C/O/N/T/E/N/T/S

Ⅰ. 수열의 극한 ····· 1

01. 수열의 극한 ····· 2

02. 급수 ····· 12

Ⅱ. 함수의 극한과 연속 ····· 24

03. 함수의 극한 ····· 25

04. 함수의 연속 ····· 37

Ⅲ.다항함수의 미분법 ····· 45

05. 미분계수와 도함수 ····· 46

06. 도함수의 활용(1) ····· 58

07. 도함수의 활용(2) ····· 67

Ⅳ. 다항함수의 적분법 ····· 76

08. 부정적분과 정적분 ····· 77

09. 정적분의 활용 ····· 85

Ⅴ. 집합과 명제 ····· 94

10. 집합 ····· 95

11. 명제 ····· 107

Ⅵ. 함수 ····· 118

12. 함수 ····· 119

13. 유리함수와 무리함수 ····· 131

Ⅶ. 수열 ····· 144

14. 등차수열과 등비수열 ····· 145

15. 수열의 합 ····· 157

16. 수학적 귀납법 ····· 167

Ⅷ. 지수와 로그 ····· 174

17. 지수 ····· 175

18. 로그 ····· 184

Ⅷ. 순열과 조합 ····· 192

19. 순열 ····· 193

20. 조합 ····· 202

21. 이항정리와 분할 ····· 211

Ⅹ. 확률 ····· 222

22. 확률 ····· 223

23. 조건부확률 ····· 232

Ⅺ. 통계 ····· 244

24. 이산확률분포 ····· 245

25. 정규분포 ····· 253

26. 통계적 추정 ····· 263

정답 및 해설 ····· 273

Ⅰ. 수열의 극한

기출 문항 분석

이 단원에서는 무한수열의 극한에 대한 성질, 무한급수의 수렴과 발산, 무한등비수열의 극한에 대한 성질, 무한등비급수의 합과 성질, 급수와 수열의 극한사이의 관계 등을 묻는 문제가 출제되고 있다. 수열의 극한에 대한 정의 및 성질을 정확하게 이해하여야 문제를 실수 하지 않고 해결할 수 있으며, 수열의 극한의 정의 및 성질에 대한 개념이 무한급수의 개념까지 이어져 오개념이 생기지 않고, 바르게 이해할 수 있다.

매년 출제되던 도형에서 무한등비급수를 활용하는 문제가 2015 수능에서는 출제되지 않고 2016 수능에서는 출제되었으며 2017 수능에서도 한 문항 출제되었다. 단순히 극한값을 계산하는 문제는 매년 출제되므로 계산실수를 하지 않도록 하고, 무한등비급수뿐만 아니라 도형과 함수의 그래프에서 수열의 극한을 활용하는 문제가 출제될 수 있다.

출제경향포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2015수능. A형. 3번	수열의 극한값에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문항 (정답형 2점)
2015수능. A형. 11번	무한등비급수의 값을 구하는 문항(정답형 3점)
2015수능. A형. 24번	무한등비급수의 성질을 이용하여 무한등비급수의 값을 구하는 문항 (단답형 3점)
2015수능. A형. 28번	무한등비수열의 극한값에 대한 성질을 이용하여 급수의 값을 구하는 문항 (단답형 4점)
2016수능. A형. 10번	이차함수와 이차방정식의 판별식을 이용하여 극한값을 구하는 문항 (정답형 3점)
2016수능. A형. 14번	이차함수에서 삼각형의 넓이와 선분의 길이를 이용하여 극한값을 구하는 문항 (정답형 4점)
2016수능. A형. 15번	무한등비급수를 도형에서 활용하는 문항 (정답형 4점)
2016수능. A형. 23번	수열의 극한값에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문항 (단답형 3점)
2017수능. 나형. 17번	무한등비급수를 도형에서 활용하는 문항 (정답형 4점)
2017수능. 나형. 28번	무한등비수열의 극한값에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문항 (단답형 4점)

01 수열의 극한

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 미적분 I 111쪽 1번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

EBS 문항 분석

가. 이차함수의 성질을 이용하여 수열의 범위를 구하고 수열의 극한값을 구하는 문제이다.

나. $\frac{a_n}{n^2}$의 범위를 구한 후 압축정리를 사용하여 극한값을 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

$\infty-\infty$ 꼴의 극한, 압축정리

가. $\infty-\infty$ 꼴의 다항식은 최고차항으로 묶어 그 극한값을 구한다.

나. $\infty-\infty$ 꼴의 무리식은 유리화를 이용하여 식을 변형한 후 그 극한값을 구한다.

다. $b_n < a_n < c_n$ 이고, $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

2017년 수능특강 미적분 I 108쪽 5번

수열 $\left\{\dfrac{(3x-2)^n}{5^n+7^n}\right\}$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 무한등비수열의 극한에서 공비의 값에 따라 극한값이 달라짐을 알고, 공비의 범위를 알고 난 후 극한값을 구하는 문제이다.

나. 공비r에 대하여 $0<r<1$, $r=1$, $r>1$로 나누어 주어진 식을 만족시키는 실수 r의 값에 따라 해결한다.

다시 보는 개념 !!

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산

가. $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

나. $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

다. $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

라. $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능완성 나형 유형편 184쪽 29번

자연수 n에 대하여 원 $C : (x-a)^2+(y-b)^2=2n^2$이 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+2$와 모두 만나도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 a_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건을 좌표평면에 그래프를 그려서 수열 a_n을 구한 후, 주어진 극한값을 구하는 문제이다.

나. 원과 직선의 그래프를 그리고, 주어진 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 평면에서 찾으면 되는데, $x=k\,(k=0,1,2,\cdots,n)$일 때 정수인 y좌표를 구하여 순서쌍의 개수를 구해야 한다.

다시 보는 개념 !!

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 : 분모의 최고차항으로 분자, 분모를 각각 나눈다.

가. (분모의 차수)>(분자의 차수)일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

나. (분모의 차수)=(분자의 차수)일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=$ (최고차항의 계수의 비)

다. (분모의 차수)<(분자의 차수)일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

2017년 수능완성 나형 유형편 54쪽 9번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\dfrac{n(n+1)}{2} < a_n < \dfrac{n(n+2)}{2}$

(나) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 b_n + n}{a_n + n^2} = 12$

수열 $\{b_n\}$이 수렴할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n b_n}{n^2}$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 부등식이 주어졌을 때, 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구하는 문제이다.

나. 주어진 조건에서 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구하고, 수열의 극한값의 성질을 이용하여 값을 구한다.

다시 보는 개념 !!

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ (α, β는 상수)일 때

가. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$ 이다.

나. 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_n \le c_n \le b_n$ 을 만족시키고 $\alpha = \beta$ 이면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$ 이다.

다. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$

라. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha - \beta$

마. $\lim\limits_{n\to\infty} k a_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n = k\alpha$ (단, k는 상수)

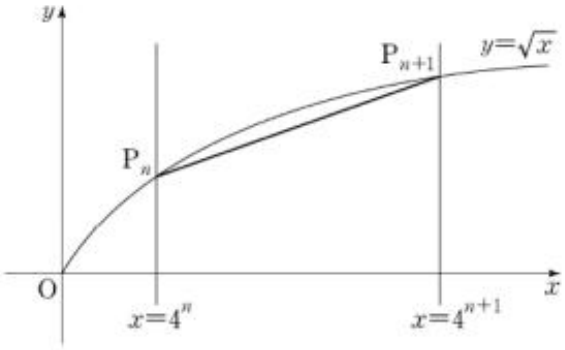
바. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

사. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

EBS 기출분석 1

기출 문항 2018학년도 대수능 수학 나형 28번

자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하시오. [4점]



EBS 교재 2016 수능특강 미적분 I 110쪽 유제 3번

자연수 n에 대하여 직선 $y=nx$와 곡선 $y=\frac{1}{x}$이 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}\,a_{n+1}-\sqrt{n}\,a_n)$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있으나 기출문항이 연계문항보다 다소 어렵다.

문항풀이 Point !!

$\infty-\infty$ 꼴의 극한을 구할 수 있어야 한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 문제 3번

$\lim_{n\to\infty}\frac{8^{n+1}-4^n}{8^n+3}$ 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

EBS 교재 2017 수능완성 미적분 I 52쪽 유제 1번

수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n=7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하시오. (단, $a_n\neq 0$)

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 식만 약간 변형하여 출제

나. EBS교재에 있는 문항은 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한을 구하는 간단한 문항이다. 기출문항은 식을 약간 변형하여 출제하였으므로 매우 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

가. $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구하는 방법을 알고 있어야 한다.

나. 분자와 분모의 차수가 같을 때는 최고차항의 비가 극한값이 된다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 | 2017 수능특강 미적분 I 110쪽 4번 변형

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \cdots + \frac{1}{2+4+6+\cdots+2n}$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} n(S_{2n} - S_n)$ 의 값을 구하시오.

풀 이

$(1+2x)^n$ 의 전개식에서 x^3 의 계수를 a_n 이라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

의 값을 구하시오

풀 이

$a_1 = \frac{1}{3}$ 이고 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = (2n-1)a_n$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ 의 값을 구하시오.

풀 이

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^2}{b_n}-\frac{b_n^2}{a_n}\right)$의 값을 구하시오.(단, $a_n\neq 0$, $b_n\neq 0$)

풀 이

02 급수

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 미적분 I 113쪽 유제1번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)$의 값은? (단, $a_1 \neq 0$)

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

EBS 문항 분석

무한급수의 성질을 이용해서 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=T$라 하면 다음이 성립한다.

가. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S+T$

나. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S-T$

다. $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum_{n=1}^{\infty}a_n=kS$ (단, k는 상수)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=\frac{1}{2}(n^2+3n)$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+2}}$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

EBS 문항 분석

가. 등차수열의 합을 이용하여 일반항을 구하고 무한급수의 부분 합을 이용하여 값을 구하는 문제이다.

나. 등차수열의 일반항을 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 구하고 부분분수를 이용하여 무한급수의 값을 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

가. 급수의 수렴

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 부분 합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 n이 한없이 커짐에 따라 일정한 수 S에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=S$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 급수의 합이라 한다.

나. 부분분수

$$\frac{1}{A\times B}=\left(\frac{1}{B-A}\right)\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$

수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 수렴하는 급수와 수열의 극한 사이의 관계를 알아야 하는 문제이다.

나. 급수의 일반항의 극한이 어떻게 되는지 먼저 살펴보고 수열 $\{a_n\}$의 극한을 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

급수와 수열의 극한 사이의 관계

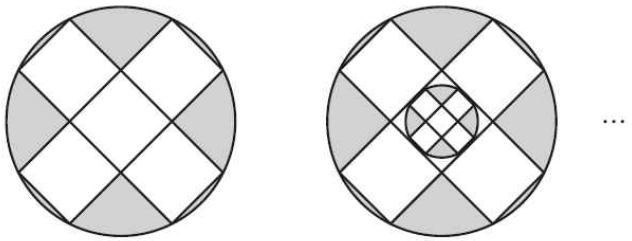
가. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

나. $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

2017년 수능완성 미적분 I 61쪽 25번

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 내부에 5개의 정사각형으로 이루어진 ◈모양의 도형이 내접하도록 그린 다음 원의 내부 중에서 ◈모양의 도형 외부의 영역에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 또 그림 R_1에서 모양의 ◈도형의 한가운데 있는 정사각형에 내접하는 원을 그리고 그 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2 ...

① $\frac{10}{9}(\pi-2)$ ② $\frac{4}{3}(\pi-2)$ ③ $\frac{14}{9}(\pi-2)$ ④ $\frac{10}{9}(\pi-1)$ ⑤ $\frac{4}{3}(\pi-1)$

EBS 문항 분석

가. 무한등비급수를 도형에서 활용하는 문제이다.

나. 첫째항을 구하고, 닮음비를 이용하여 공비를 구한 후 무한등비급수 합 공식에 대입하면 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\ (a\neq 0)$은

가. $|r|<1$이면 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

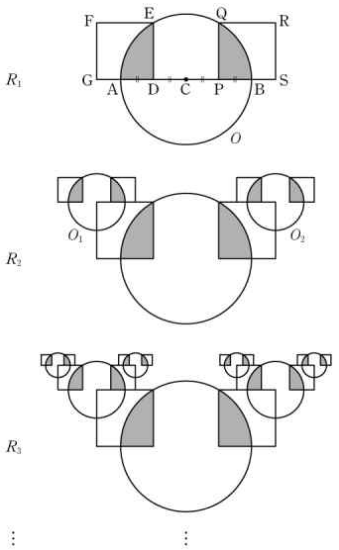
나. $|r|\geq 1$이면 발산한다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 17번

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 ◿모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 ◺모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◿모양의 2개의 도형과 ◺모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

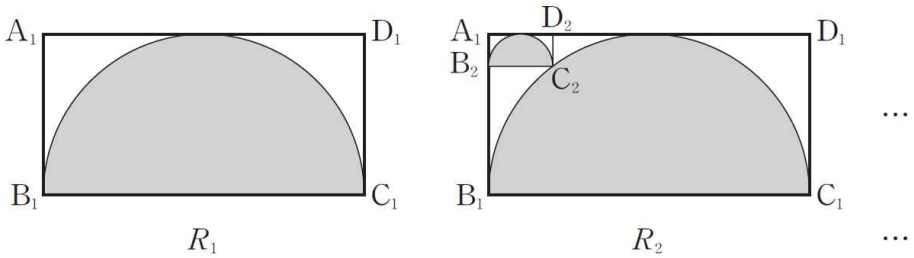
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$

④ $\frac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

$\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1을 지름으로 하고 선분 A_1D_1에 접하는 반원을 그리고 반원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 점 B_1이 아닌 선분 A_1B_1위의 점 B_2, 반원의 호 B_1C_1 위의 점 C_2, 선분 A_1D_1위의 점 D_2와 점 A_1을 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_1B_2}:\overline{A_1D_2}=1:2$인 직사각형 $A_1B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 반원을 그리고 반원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



EBS 문항 분석

가. 무한등비급수를 도형에서 활용하는 문제이다.

나. 첫째항을 구하고, 닮음비를 이용하여 공비를 구한 후 무한등비급수 합 공식에 대입하면 구할 수 있다.

문항풀이 Point !!

등비수열의 공비를 구하고 도형의 닮음비를 구하여 등비수열의 합 공식에 대입하여 수식을 전개해 나간다.

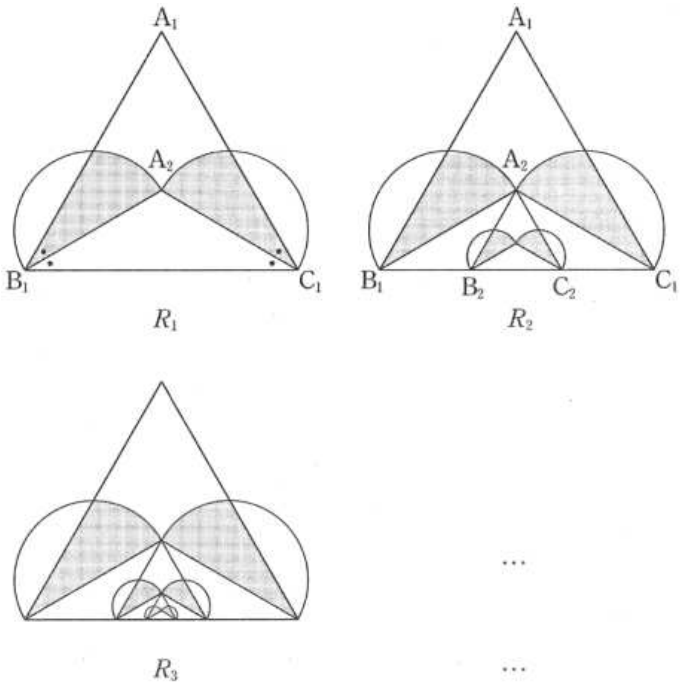
EBS 기출분석 2

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 문제 18번

한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 있다. 그림과 같이 $\angle A_1B_1C_1$ 의 이등분선과 $\angle A_1C_1B_1$ 의 이등분선이 만나는 점을 A_2 라 하자. 두 선분 B_1A_2, C_1A_2 를 각각 지름으로 하는 반원의 내부와 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 점 A_2 를 지나고 선분 A_1B_1 에 평행한 직선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점을 B_2, 점 A_2 를 지나고 선분 A_1C_1 에 평행한 직선이 선분 B_1C_1 과 만나는 점을 C_2 라 하자. 그림 R_1 에 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 정삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 내부에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

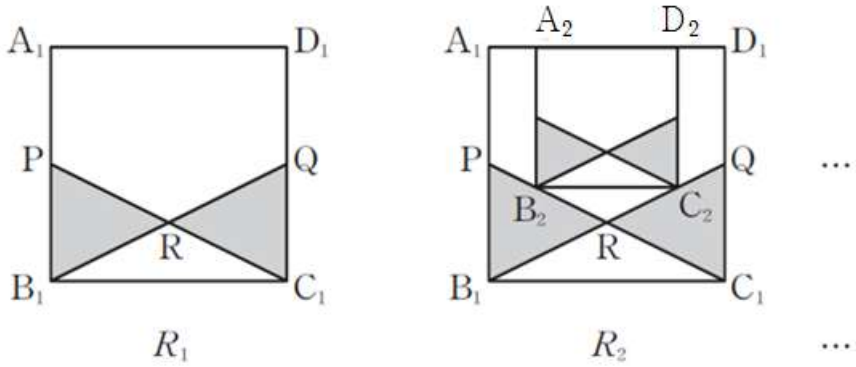
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



① $\frac{9\sqrt{3}+6\pi}{16}$ ② $\frac{3\sqrt{3}+4\pi}{8}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}+8\pi}{16}$

④ $\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{4}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}+6\pi}{8}$

한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 변 A_1B_1과 변 D_1C_1의 중점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PC_1과 선분 QB_1이 만나는 점을 R라 하고 두 삼각형 B_1RP와 C_1RQ를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 변 A_1D_1위에 두 점 A_2, D_2를 잡고 두 점 B_2와 C_2는 각각 변 PR와 변 QR 위에 잡아 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{23}{16}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{25}{16}$

④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{27}{16}$

EBS 문항 분석

가. 무한등비급수를 도형에서 활용하는 문제이다.

나. 첫째항을 구하고, 닮음비를 이용하여 공비를 구한 후 무한등비급수 합 공식에 대입하면 구할 수 있다.

문항풀이 Point !!

등비수열의 공비를 구하고 도형의 닮음비를 구하여 등비수열의 합 공식에 대입하여 수식을 전개해 나간다.

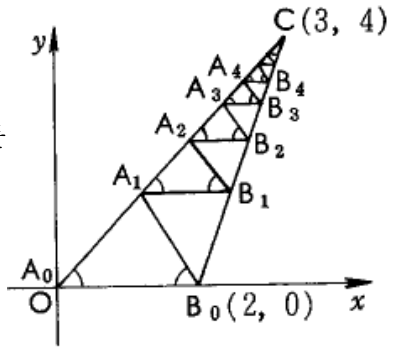
EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능완성 미적분 I 60쪽 유형9번 변형

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ 은 x 축에 평행하고
$\angle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n = \angle \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n$ 인
이등변삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ 을 그림과 같이 한없이 만들어 나갈 때,

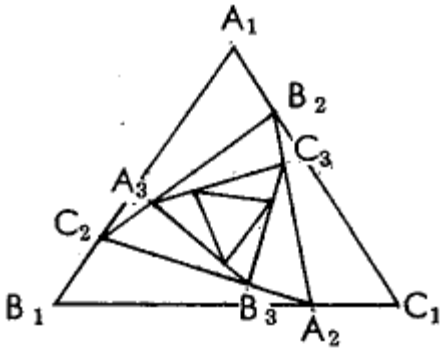
$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n}$$

의 값을 구하시오.



풀 이

한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 각 변을 오른쪽 그림과 같이 3 : 1로 내분한 점을 이어서 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 만든다. 이와 같은 방법으로 $\triangle A_3B_3C_3$, $\triangle A_4B_4C_4$, ···를 만들 때, $\triangle A_nB_nC_n$의 면적을 S_n이라 할 때 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

풀 이

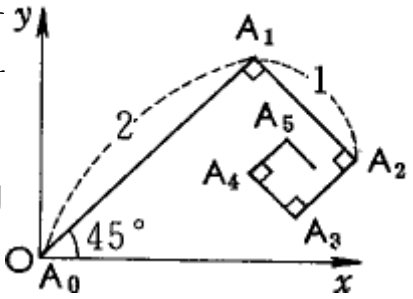
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k^n} = k$를 만족하는 자연수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 원점 A_0으로부터 x축의 양의 방향과 45°를 이루고 $\overline{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}=2$가 되도록 A_1을 정하고, A_2부터는

$\angle \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}=90^\circ$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$이 되도록 점 $\mathrm{A}_n(x_n,\ y_n)$을 정할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값은?



① $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{5}$

풀 이

Ⅱ. 함수의 극한과 연속

기출 문항 분석

이 단원에서는 함수의 극한값 계산 또는 극한에서 미정계수를 결정하는 이해력 문제가 매년 거의 빠짐없이 출제되고 있다. 함수의 그래프를 이용하여 함수의 합, 곱, 합성함수의 극한값 계산과 연속성을 판단하는 문제는 고난이도 문제로 최근에 자주 출제되는 경향을 보인다. 중간값의 정리를 이용하여 방정식의 실근의 존재성을 묻는 문제가 최근 5년 동안 수능에서는 출제되지 않았지만 앞으로 출제될 가능성이 높은 부분이므로 충분히 학습하여 준비하여야 할 것으로 보인다. 극한 단원에서는 다양한 유형의 극한값을 구하는 문제들을 많이 풀어보는 것이 무엇보다 중요하다. 또한 함수의 그래프가 주어질 때 우극한과 좌극한을 구하여 극한값의 존재성을 판별하는 연습과 두 함수의 곱이나 합성함수가 연속이 될 수 있는지를 판별하는 연습을 많이 해 두어야 한다. 극한의 성질과 연속성에 대한 성질을 알고 있는가를 묻는 합답형 문제는 개념을 꼼꼼히 정리하고 활용할 수 있어야 하고, 거짓인 명제에 대한 반례를 제시하기 위해 몇 가지 기본적인 함수들을 기억해 두어야 한다.

출제경향포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2015수능. A형. 8번	함수의 그래프가 주어졌을 때 좌극한과 우극한을 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. A형. 22번	함수의 식이 주어졌을 때 극한값을 구하는 문제(단답형 3점)
2015수능. A형. 23번	주어진 함수가 연속이 되기 위한 미지수의 값을 구하는 문제(단답형 3점)
2016수능. A형. 3번	함수의 식이 주어졌을 때 극한값을 구하는 문제(정답형 2점)
2016수능. A형. 8번	함수의 그래프가 주어졌을 때 좌극한과 우극한을 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. A형. 27번	주어진 함수가 연속이 되기 위한 미지수의 값을 구하는 문제(단답형 4점)
2017수능. 나형. 8번	함수의 그래프가 주어졌을 때 좌극한과 우극한을 구하는 문제(정답형 3점)
2017수능. 나형. 14번	주어진 함수가 연속이 되기 위한 미지수의 값을 구하는 문제(정답형 4점)
2017수능. 나형. 18번	함수의 식이 주어졌을 때 극한값을 구하는 문제(정답형 4점)

03 함수의 극한

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 미적분 I 129쪽 유제08번

$\lim_{x\to\infty}\{x(\sqrt{ax^2+b}-x)\}=3$일 때, $10a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건과 미정계수를 이용하여 함수를 정하고 나머지 조건을 이용하여 미정계수를 구한 후 최종적으로 함수를 구하여야 한다.

나. 주어진 조건에서 상수 a, b를 예측하고 $10a+b$ 의 값을 최종 결정한다.

다시 보는 개념 !!

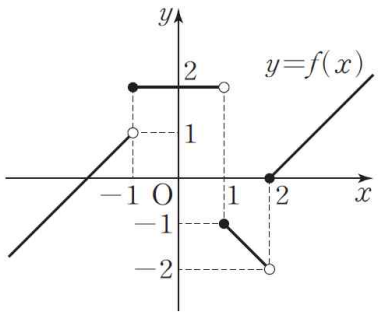
두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 상수)일 때

가. $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

나. $\lim_{x\to a}f(x)=0$이고 $\alpha\neq 0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

2017년 수능특강 미적분 I 129쪽 유제08번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 주어진 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한의 합을 구하는 문제이다.

나. 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 우극한과 $x=2$에서의 좌극한을 잘 파악해야 한다.

다시 보는 개념 !!

좌극한과 우극한

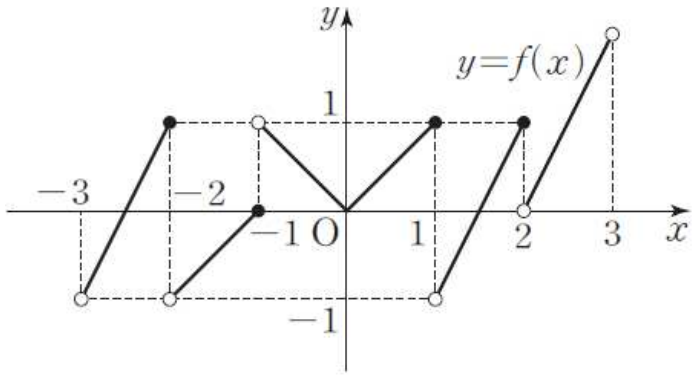
가. 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라 한다.

나. 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라 한다.

다. $x=a$에서 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 모두 α이면 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$이다. 또한, 그 역도 성립한다.

즉, $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$

정의역이 $\{x|-3<x<3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$-2\le k\le 2$인 정수 k에 대하여 $\lim_{x\to k}|f(x)|$의 값이 존재하는 모든 k의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 주어진 그래프를 보고 절댓값이 포함된 함수의 극한값을 묻는 문제이다.
나. 함수 $|f(x)|$의 극한값의 존재 유무를 잘 파악해야 한다.

다시 보는 개념 !!

좌극한과 우극한

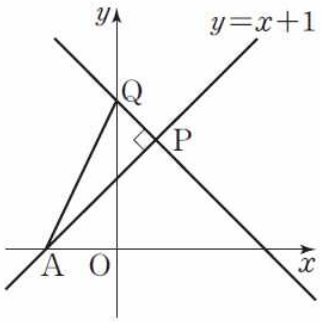
가. 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라 한다.

나. 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라 한다.

다. $x=a$에서 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 모두 α이면 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$이다. 또한, 그 역도 성립한다.

즉, $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=\alpha$

그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$과 $\mathrm{P}(t,\ t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$의 값은?



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

EBS 문항 분석

점 P의 좌표를 이용하여 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 다음 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

극한값의 계산

가. $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값 : 분모와 분자를 각각 인수분해하거나 무리식이 들어 있는 쪽을 유리화한 다음 분모, 분자의 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

나. $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값 : 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 구한다.

다. $\infty-\infty$ 꼴의 극한값

① $f(x)-g(x)$가 다항식이면 $f(x)-g(x)$의 최고차항으로 묶어서 극한값을 구한다.

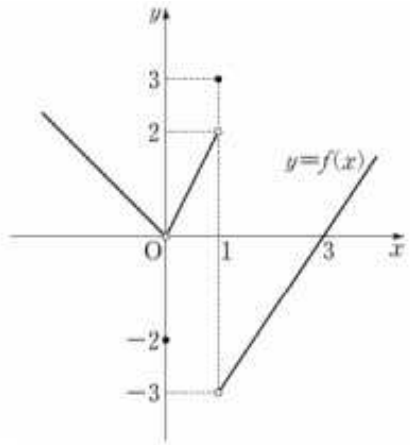
② $f(x)-g(x)$가 무리식이면 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 만들어 극한값을 구한다.

라. $0\times\infty$꼴의 극한값 : 식을 적당히 변형하여 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty\times c,\frac{c}{\infty}$($c$는상수)꼴로 만들어 구한다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 8번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

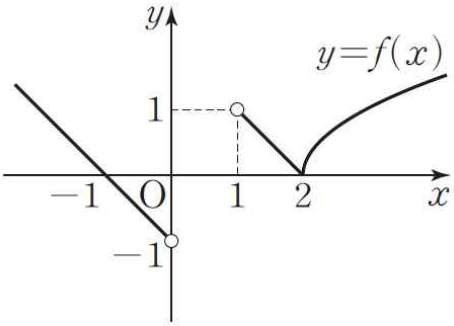


$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

EBS 교재 2016 수능특강 미적분 I 131쪽 01번

함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같다.



$0\le x\le 1$에서 $f(x)=c$ (c는 상수)이고, $\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=2$일 때,

$\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 개념과 원리를 문제를 축소 변형하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념인 좌극한의 값과 우극한의 값을 묻고 있으나 기출문항이 연계문항보다 다소 쉽다.

문항풀이 Point !!

함수의 좌극한과 우극한의 정의를 잘 알고 함수의 그래프를 보고 극한값을 찾을 수 있어야 한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 18번

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능완성 미적분 I 69쪽 18번

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-1}{f(x)}=2$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f\left(\frac{2}{x}\right)}{2x^2-x-1}=4$

$f(x)$의 최솟값은?

① -1 ② -3 ③ -5 ④ -7 ⑤ -9

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문제와 EBS교재의 문항은 분모가 0 으로 갈 때 다항식의 인수가 어떻게 되는지 묻는 문항으로 연계율이 높은 문항이다. 이런 유형에 대한 연습이 충분한 학생은 쉽게 해결할 수 있다.

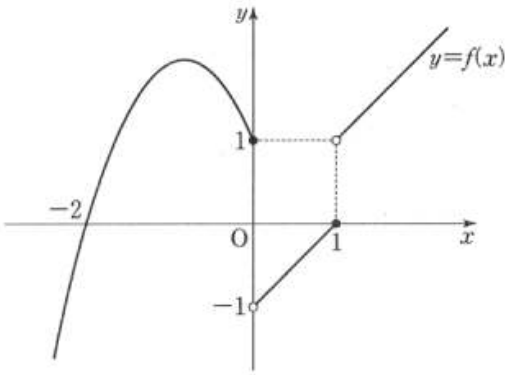
문항풀이 Point !!

함수의 극한값의 성질을 잘 알고 다항식의 인수가 어떻게 되는지 잘 파악해야 한다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 문제 9번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

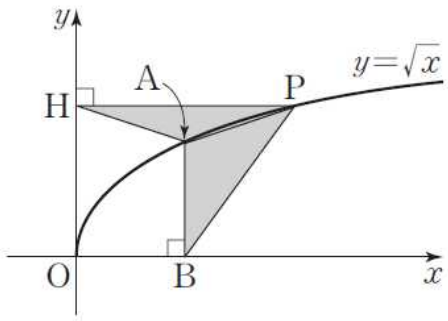


$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

EBS 교재 2017 수능완성 미적분 I 70쪽 20번

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(t^2,\ t)$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$과 x축 위의 점 $\mathrm{B}(1,\ 0)$에 대하여 삼각형 PAB와 삼각형 PHA의 넓이를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 1+} \frac{f(t)}{g(t)}$의 값은? (단, $t>1$)



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 개념과 원리를 문제를 어렵게 변형하여 출제

나. 기출문항은 좌극한의 값과 우극한의 값을 묻고 있으나 EBS교재의 문항은 그래프의 해석을 통한 넓이에 대한 극한값을 묻는 문항으로 기출문항이 연계문항보다 다소 쉽다.

문항풀이 Point !!

함수의 좌극한과 우극한의 정의를 잘 알고 함수의 그래프를 보고 극한값을 찾을 수 있어야 한다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 미적분 I 130쪽 5번 변형

3 차 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a>0)$에 대하여

$$\left(\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\right)\left(\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}\right)=240,\ f'\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

을 만족할 때, $\dfrac{cd}{ab}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\sqrt{1+x}-\frac{1+ax}{1+bx}\right)$이 존재할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

풀 이

함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, $g(1)=0$, $g'(1)=1$을 만족시킬 때,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)+g(x)}{x^2-1}$$

의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

풀 이

04 함수의 연속

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 미적분 I 140쪽 03번

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & (a \le x \le b) \\ x^2-3x+1 & (x<a \text{ 또는 } x>b) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은?(단, $a<b$이고 a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

$x=\alpha$에서 함수 $y=f(x)$가 연속이 되는 조건을 이용하여 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때,

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속.

가. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

나. 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

다. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2017년 수능특강 미적분 I 141쪽 03번

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+a}{x^{2n+2}+1}$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

EBS 문항 분석

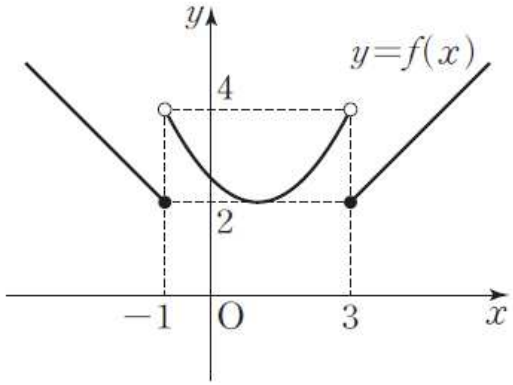
가. 주어진 함수를 x의 값에 따라 먼저 정리한 후 구하는 문제이다.
나. 극한으로 정의된 함수는 x의 값의 범위에 따라 함숫값이 달라진다.

다시 보는 개념 !!

$\lim_{x\to\infty}x^n$을 포함한 함수 $f(x)$의 연속성은 x의 값의 범위를 $|x|>1$, $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$인 경우로 구분하여 함수 $f(x)$를 구한 후 연속성을 조사한다.

2017년 수능완성 미적분 I 73쪽 33번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(5)$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 주어진 함수 $y=f(x)$에 대하여 2차 함수 $y=g(x)$를 곱하여 연속함수가 되는가를 묻는 문제이다.

나. 연속함수× 연속함수는 연속함수이므로 함수 $y=f(x)$의 불연속 근방에서 잘 살펴야 되는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

가. $kf(x)$(단, k는 상수)

나. $f(x)+g(x)$

다. $f(x)-g(x)$

라. $f(x)g(x)$

마. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

2017년 수능완성 미적분 I 75쪽 39번

함수 $f(x)=3x+2\sqrt{x}+k$는 임의의 두 양수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$이 열린 구간 $(1,\ 4)$에서 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

EBS 문항 분석

사잇값 정리를 이용하여 방정식의 실근이 존재하는 조건을 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 사잇값 정리 : 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

나. 사잇값 정리의 활용 : 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b) < 0$이면 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$은 a와 b 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 14번

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x<2) \\ 1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

$$g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?[4점]

① $-\frac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

EBS 교재 2016 수능특강 미적분 I 136쪽 04번

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<0) \\ x^3+1 & (x\geq 0) \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & (x<0) \\ x+k & (x\geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속일 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. $x=a$에서 함수 $y=f(x)$가 연속이 되는 조건을 이용하여 구하는 문제이다.

문항풀이 Point !!

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때,

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속.

가. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

나. 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

다. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

EBS 기출분석 2

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 문제 14번

함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+a}{x-3} & (x\neq 3)\\ b & (x=3)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

EBS 교재 2016 수능특강 미적분 I 137쪽 03번

함수 $f(x)=x+\dfrac{x}{1+|x|}+\dfrac{x}{(1+|x|)^2}+\dfrac{x}{(1+|x|)^3}+\cdots$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(-1,1)$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 극한으로 정의된 함수는 x의 값의 범위에 따라 함숫값이 달라진다.

문항풀이 Point !!

$\lim\limits_{x\to\infty}x^n$을 포함한 함수 $f(x)$의 연속성은 x의 값의 범위를 $|x|>1$, $|x|<1$, $x=1$, $x=-1$인 경우로 구분하여 함수 $f(x)$를 구한 후 연속성을 조사한다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 | 2017 수능완성 미적분 I 74쪽 유형 09번 변형

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(x-3)^{2n+1}+(x-1)^{2n+1}}{(x-3)^{2n}+(x-1)^{2n}}$ (n은 자연수)가 불연속이 되는 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

열린 구간 $\left(\frac{1}{10},\ 10\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$의 불연속점의 개수는?(단, $[\,x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

풀 이

Ⅲ. 다항함수의 미분법

기출 문항 분석

다항함수의 미분법은 매년 수능에서는 두 문항에서 세 문항이 출제되었다. 그 내용을 살펴보면 간단한 미분계수의 정의를 묻는 문항과 극대·극소를 이용한 그래프 및 관련된 개념을 묻는 문항, 여러 가지 상황에서의 접선의 방정식을 구하는 문항이다.

출제 경향을 분석해 보면 미분계수의 정의를 이용하여 계산만을 묻는 문제, 증감표를 활용한 그래프의 개형파악문제가 자주 출제된다. 특히, 삼차함수의 극대·극소와 관련된 문제와 그래프 위의 점에서의 접선에 대한 문제가 자주 출제되는 편이다.

2017학년도 수능에서는 미분계수를 구하는 간단한 문제와 도함수의 성질을 이용하여 해를 가질 조건을 구하는 문제가 출제되었다. 삼차함수와 사차함수의 그래프 개형에 대해서도 충분한 연습이 필요할 것으로 예상된다. 따라서 미분법의 공식을 잘 습득하고 삼차와 사차함수의 그래프 개형의 특징을 파악하며 극값을 가질 때의 여러 가지 성질들을 충분히 연습해 두어야 한다.

출제경향포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2015수능. A형. 14번	접선의 방정식을 이용하여 해결하는 문항(정답형 4점)
2015수능. A형. 21번	미분을 이용하여 다항함수의 그래프를 구하는 문항(정답형 4점)
2015수능. A형. 29번	도함수의 성질을 이용하여 극솟값을 구하는 문항(단답형 4점)
2016수능. A형. 5번	미분법을 이용하여 미분계수의 값을 구하는 문항(정답형 3점)
2016수능. A형. 28번	도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구하는 문항(단답형 4점)
2017수능. 나형. 20번	도함수와 정적분의 성질을 이용하여 해결하는 문항(정답형 4점)
2017수능. 나형. 23번	미분을 이용하여 미분계수의 값을 구하는 문항(단답형 3점)
2017수능. 나형. 26번	접선의 기울기를 구하여 해결하는 문제(단답형 4점)
2017수능. 나형. 30번	도함수의 성질을 이용하여 실근을 갖기 위한 조건을 구하는 문항(단답형 4점)

05 미분계수와 도함수

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 미적분 I 145쪽 예제1번

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)+f'(3)$의 값은?

(가) $\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-3}=5$ (나) $g(3)=4,\ g'(3)=2$

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

EBS 문항 분석

가. 극한의 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 함숫값을 구하는 문제이다.

나. 주어진 조건에서 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 성질을 파악하고 극한의 성질을 이용하여 값을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분계수의 정의

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

나. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\alpha$ (α는 상수)이고 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

2017년 수능특강 미적분 I 152쪽 1번

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=-1,\ \lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=-2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{xg(1)-g(x)}{xf(1)-f(x)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

EBS 문항 분석

가. 극한의 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구하는 문제이다.

나. 미분계수의 정의에서 주어진 식을 잘 유도할 수 있어야 한다.

다. 위의 문제처럼 식의 변형을 통해 같은 개념을 묻는 문제가 출제될 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분계수의 정의

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

나. 미분계수의 정의의 확장

$$f'(a)=\lim_{x\to c}\frac{f(g(x))-f(a)}{g(x)-a}\qquad (\text{단, } \lim_{x\to c}g(x)=a)$$

$$f'(a)=\lim_{h\to c}\frac{f(a+g(h))-f(a)}{g(h)}\qquad (\text{단, } \lim_{h\to c}g(h)=0)$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능완성 수학나형 80쪽 4번

함수

$$f(x)=\begin{cases} a(6x-x^2) & (x<2) \\ x^3-bx & (x\geq 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 미분가능할 때, $f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -36 ② -35 ③ -34 ④ -33 ⑤ -32

EBS 문항 분석

가. 미분가능성과 연속성에 관한 문제로 주어진 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하기 위한 미정계수 a, b를 정해야 한다.

나. 두 다항함수의 곱이나 합성으로 정의된 함수의 연속성과 미분가능성에 관한 문제는 수능에서 꾸준히 출제되고 있으며 특히 불연속점을 가지는 함수와 다항함수의 곱에서 미분 가능하도록 미정계수를 결정하는 위와 같은 문제는 반드시 익혀야 하는 유형의 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분계수의 정의

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

나. 미분가능성과 연속성

$x=a$에서 미분계수 $f'(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 그러나 일반적으로 역은 성립하지 않는다.

2017년 수능완성 수학나형 81쪽 유형3번

미분가능한 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to -2}\dfrac{f(x)+2}{x+2}=4$를 만족시키고 $g(x)=(x+3)^2$이다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(-2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 함수를 미분한 식을 적절한 값의 대입으로 해결할 수 있어야 한다.

다. 위의 문제처럼 단순한 미분법의 계산이나, 식의 변형을 통해 해결해야 하는 같은 개념을 묻는 문제가 출제될 수 있다.

라. 곱으로 나타난 함수의 미분법을 사용하여 문항을 해결할 수 있도록 연습하여 쉬운 문항의 풀이 시간을 줄일 수 있도록 해야 한다.

다시 보는 개념 !!

함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

(1) $y=c\cdot f(x) \quad \rightarrow \quad y'=c\cdot f'(x)$

(2) $y=f(x)\pm g(x) \quad \rightarrow \quad y'=f'(x)\pm g'(x)$

(3) $y=c \quad \rightarrow \quad y'=0$ (단, c는 상수)

(4) $y=x^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \rightarrow \quad y'=n\cdot x^{n-1}$

(5) $y=f(x)\cdot g(x) \quad \rightarrow \quad y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학나형 23번

함수 $f(x)=x^3+3x^2+3$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

EBS 교재 2016 수능완성 수학나형 76쪽 9번

함수 $f(x)=x^3-2x^2+3$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 것을 묻는 동일한 유형의 문항이다. 미분법에 대한 연습이 충분한 학생은 쉽게 해결할 수 있다.

문항풀이 Point !!

(1) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

(2) $y=x^n$ (n은 자연수)이면 $y'=nx^{n-1}$

(3) $y=cf(x)$ (c는 상수)이면 $y'=cf'(x)$

(4) $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

(5) $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

(6) $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

EBS 기출분석 2

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 16번

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x\le -2) \\ 2x & (x>-2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

EBS 교재 2017 수능특강 미적분 I 147쪽 예제2번

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-1 & (x<2) \\ bx^2+12x-11 & (x\ge 2) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 미분가능할 때, $f(1)+f(4)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 구간별로 정의된 함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때 구간의 경계에서도 미분가능하다는 조건을 이용하여 미정계수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 동일한 유형의 문항이다.

문항풀이 Point !!

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

(1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 즉, $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$

(2) $f'(a)$가 존재한다. 즉, $\lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

EBS 기출분석 3

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 20번

함수

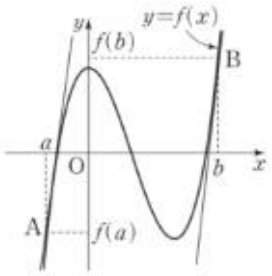
$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1 \ (k>0\text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

EBS 교재 2017 수능특강 미적분 I 151쪽 3번

그림과 같이 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2$의 그래프 위의 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$에서의 접선의 기울기가 모두 9이다. $a+10b$의 값을 구하시오. (단, $a<b$이고 a, b는 상수이다.)



EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항을 축소·확대·변형하여 출제

나. EBS교재의 문항과 기출문항은 함수 위의 점에서의 미분계수가 접선의 기울기와 같다는 것을 이용하여 해결하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 23번

함수 $f(x)=5x^5+3x^3+x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

EBS 교재 2017 수능특강 미적분 I 150쪽 5번

함수 $f(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항을 축소·확대·변형하여 출제

나. 기출문항은 항이 3개인 함수의 미분계수를 묻고 있으며 EBS교재의 문항은 항이 5개인 함수의 미분계수를 구하는 것을 묻는 유사한 유형의 문항이다. 미분법에 대한 연습이 충분한 학생은 쉽게 해결할 수 있다.

문항풀이 Point !!

(1) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

(2) $y=x^n$ (n은 자연수)이면 $y'=nx^{n-1}$

(3) $y=cf(x)$ (c는 상수)이면 $y'=cf'(x)$

(4) $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

(5) $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

(6) $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 미적분 I 145쪽 유제2번 변형

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=5$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$의 값을 구하시오.

풀 이

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(2)$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2)=(x-2)g(x)$이다.
(나) $f'(4)=1$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

함수 $f(x)=x^3-2x^2+5x$ 에 대하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{3h}=-3$ 을 만족시키는 모든 상수 a 의 값의 합을 구하시오.

풀 이

함수 $f(x)=(x^3+kx)(x^2-x+1)$에 대하여 $f(2)=18$일 때, $f'(k)$의 값은?
(단, k는 상수이다.)
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

풀 이

06 도함수의 활용(1)

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 미적분 I 155쪽 예제1번

다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+3$이다. 함수

$$g(x)=xf(x)$$

에 대하여 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식은?

① $y=5x+1$ ② $y=5x$ ③ $y=6x-1$

④ $y=7x-2$ ⑤ $y=7x-3$

EBS 문항 분석

가. 곡선 위의 한 점이 주어졌을 때, 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 찾는 문제이다.

나. 곡선 밖의 점이 주어진 경우는 반드시 연습을 통해 익혀 두어야 시험에서 당황하지 않고 문제를 해결할 수 있다. 또한 도함수의 개념을 활용해야 해결할 수 있는 결합형 문제가 출제될 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 접점 (x_1, y_1)의 좌표가 주어질 때 접선의 방정식 구하는 방법

① 접선의 기울기 $f'(x_1)$을 구한다.

② $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$에 대입한다.

나. 기울기 m이 주어질 때 접선의 방정식 구하는 방법

① $f'(x_1)=m$을 만족하는 접점의 좌표를 구한다.

② $y-y_1=m(x-x_1)$에 대입한다.

다. 곡선 밖의 한 점 $(x_1,\ y_1)$이 주어질 때 접선의 방정식 구하는 방법

① 접점을 $(\alpha,\ f(\alpha))$로 놓는다.

② $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$에 $x=x_1,\ y=y_1$을 대입하여 α 값을 구한다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

2017년 수능특강 미적분 I 164쪽 2번

함수 $f(x)=x^3-3x+1$에 대하여 $f(3)-f(0)=3f'(c)$를 만족시키는 실수 c의 값은? (단, $0<c<3$)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

EBS 문항 분석

가. 도함수를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 미지수를 찾는 문제이다.

나. 주어진 식 $f(3)-f(0)=3f'(c)$을 변형하면 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$이고, 평균값 정리에 의해 이를 만족하는 c가 열린 구간 $(0,3)$에 존재함을 알 수 있다.

다. 위의 문제는 평균값 정리의 개념을 적용하지 않아도 미분을 이용하여 간단히 해결이 가능하지만, 평균값 정리를 이용한 식의 변형을 통해 최댓값 또는 최솟값을 묻는 문제가 출제될 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(x)=0$인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

나. 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능완성 수학나형 83쪽 13번

함수 $f(x)=-2x^3+(a+2)x^2$ 이 열린 구간 $(0,\ 5)$ 에서 증가할 때, 실수 a의 최솟값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

EBS 문항 분석

가. 함수가 증가 또는 감소할 조건을 이용하여 미정계수의 값을 구하는 문제이다.

나. 도함수를 구하여 삼차함수 $f(x)$가 $0<x<5$인 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다는 사실을 알고 a값의 범위에 따라 $f'(x)$의 값을 파악하는 다소 어려운 문항으로 구간에서의 증가상태를 파악해 보는 어려운 유형의 문항이다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$ 일 때, $f(x_1)<f(x_2)$ 이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$ 일 때, $f(x_1)>f(x_2)$ 이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

나. 함수의 증가와 감소의 판정

① $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

2017년 수능완성 수학나형 84쪽 17번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+3)f(x)\geq 0$이다.

함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

EBS 문항 분석

가. 함수의 극값을 묻는 문제이다.
나. 함수의 극대, 극소와 관련된 다양한 유형의 문제들이 출제된다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가
(1) 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
(2) 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

나. $x=a$에서 미분가능하지 않더라도 $x=a$를 포함하는 구간의 모든 x에 대하여
(1) $f(x)\leq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
(2) $f(x)\geq f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학나형 26번

곡선 $y=x^3-ax+b$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이다. 두 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하시오.

EBS 교재 2016 수능완성 수학나형 78쪽 16번

곡선 $y=-3x^3+4x+1$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -20 ② -25 ③ -30 ④ -35 ⑤ -40

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 연계문항이 단순히 주어진 함수의 접점에서의 접선의 방정식을 구하는 문제라면 기출문항은 두 기울기의 수직 조건이 첨가된 문항으로 난이도는 비슷하게 출제되었다.

문항풀이 Point !!

가. 접점 (x_1, y_1) 의 좌표가 주어질 때 접선의 방정식 구하는 방법

① 접선의 기울기 $f'(x_1)$ 을 구한다.

② $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$ 에 대입한다.

나. 기울기 m 이 주어질 때 접선의 방정식 구하는 방법

① $f'(x_1)=m$ 을 만족하는 접점의 좌표를 구한다.

② $y-y_1=m(x-x_1)$ 에 대입한다.

다. 곡선 밖의 한 점 (x_1, y_1) 이 주어질 때 접선의 방정식 구하는 방법

① 접점을 $(\alpha, f(\alpha))$ 로 놓는다.

② $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ 에 $x=x_1, y=y_1$ 을 대입하여 α 값을 구한다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 미적분 I 164쪽 1번 변형

곡선 $y=ax^3+bx^2+x-1$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선의 방정식이 $y=6x-7$일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

풀 이

함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x$ 의 극댓값을 M, 극솟값을 m 이라 하자. $M-\dfrac{5}{m}$ 의 최솟값은? (단, $a>0$)

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

풀 이

함수 $f(x)=-x^3+ax^2-(4a-a^2)x+5$가 실수 전체의 집합에서 감소하도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

함수 $f(x)=x^3-3ax^2-3bx$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 10 을 가질 때, $f(x)$ 의 극솟값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

풀 이

07 도함수의 활용(2)

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 미적분 I 161쪽 유제7번

곡선 $f(x)=x^3+2x^2-x+k$와 직선 $y=3x+2k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 두 함수의 그래프를 각각 증감표를 이용하여 그려 만나는 점을 파악할 수도 있지만, 두 함수의 교점의 개수가 방정식 $x^3+2x^2-x+k=3x+2k$의 서로 다른 실근의 개수와 같다는 것을 파악할 수 있는가를 묻는 문제이다.

나. 주어진 두 함수에서 미지수를 우변으로 두고 좌변의 함수를 그려본 뒤 교점의 개수를 파악하면 된다. 미분을 이용하여 함수의 증가, 감소를 나타낸 표를 만들고 이를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그려서 문제를 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 방정식 $f(x)=k$ (k는 상수)의 실근의 개수

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

나. 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수

도함수를 이용하여 $y=f(x)-g(x)$의 그래프의 개형을 그린 다음 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수를 구한다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

2017년 수능특강 미적분 I 159쪽 예제3번

닫힌 구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M \times m = -100$이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

EBS 문항 분석

가. 주어진 구간에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 닫힌 구간에서 연속인 함수의 최댓값, 최솟값을 구하거나 도형의 길이, 넓이, 부피 등에 관한 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

다. 주어진 문제 상황에 관련된 함수식을 만들고 미분을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

(1) 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

(2) 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

나. $x=a$에서 미분가능하지 않더라도 $x=a$를 포함하는 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

(2) $f(x) \ge f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

다. 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 극댓값과 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 것이 최댓값, 가장 작은 것이 최솟값이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능완성 수학나형 88쪽 27번

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-4x^3+a\geq 0$이 항상 성립하기 위한 실수 a의 최솟값은?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

EBS 문항 분석

가. 주어진 범위에서 부등식이 항상 성립하기 위한 조건을 구하는 문제이다.

나. 미분을 이용해 사차함수의 그래프의 성질을 파악하여 a 값의 범위를 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 보이려면 일반적으로 주어진 구간에서 $f(x)$의 최솟값을 구하여 ($f(x)$의 최솟값) ≥ 0임을 보이면 된다.

나. 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 보이려면 일반적으로 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 주어진 구간에서 $h(x)$의 최솟값을 구하여 ($h(x)$의 최솟값) ≥ 0임을 보이면 된다.

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t일 때의 위치는

$$x(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2$$

이다. 점 P가 출발 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 순간의 점 P의 위치는?

① -36 ② -34 ③ -32 ④ -30 ⑤ -28

EBS 문항 분석

가. 위치의 변화율은 속도, 속도의 변화율은 가속도라는 개념을 이용하는 문제이다.

나. $f'(x)=0$이 되는 점, 즉 속도가 0이 되는 점은 방향을 바꾸거나 정지하는 점이 될 수 있다.

다. 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 속도의 관계를 이용한 문제는 실생활 문제로 응용되기 싶고 도함수의 활용문제로 자주 등장하므로 연습해 두도록 한다.

다시 보는 개념 !!

수직선 위를 움직이는 점 P의 위치 x가 $x=f(t)$로 주어질 때

(1) 시각 t에서의 점 P의 속도 v는 $v=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle x}{\triangle t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$

(2) 시각 t에서의 점 P의 가속도 a는 $a=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle v}{\triangle t}=\frac{dv}{dt}=f''(t)$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학나형 17번

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 x가

$$x=t^3-12t+k \ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀔 때, k의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

EBS 교재 2017 수능특강 미적분 I 163쪽 예제5번

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각

$$t^3-12t,\ 2t^2-4t+1$$

이다. $t>0$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간, 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 문항을 축소·확대·변형하여 출제

나. EBS교재의 문항은 수직선 위를 움직이는 점의 속도가 0인 시각에서의 가속도를 묻고 있으며 기출문항은 수직선 위를 움직이는 점의 속도가 0인 시각을 이용하여 미정계수의 값을 구하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

수직선 위를 움직이는 점 P의 위치 x가 $x=f(t)$로 주어질 때

(1) 시각 t에서의 점 P의 속도 v는 $v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$

(2) 시각 t에서의 점 P의 가속도 a는 $a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=f''(t)$

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 | 2017 수능특강 미적분 I 164쪽 4번 변형

x에 대한 방정식 $-2x^3+3x^2+a=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

풀 이

닫힌 구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)=-x^3+12x-2a$의 최솟값이 -4일 때, 이 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값은? (단, a는 상수이다.)

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

풀 이

두 함수 $f(x)=x^3+2ax^2-3a$, $g(x)=4ax^2-a^2x-12$가 있다. 구간 $(0,\ 2a)$에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 항상 성립하기 위한 자연수 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $f(t)=t^4-8t^3$, $g(t)=2at$이다. $t>0$에서 두 점 P, Q의 속도가 서로 같을 때가 단 한 번이기 위한 정수 a의 최솟값을 구하시오.

풀 이

Ⅳ. 다항함수의 적분법

기출 문항 분석

부정적분이나 정적분의 성질을 이용하여 주어진 식을 계산하는 문제나 함수의 대칭성을 이용하여 정적분을 구하는 문제, 정적분과 미분, 정적분과 급수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식의 값을 구하는 문제, x축 사이의 넓이, 두 곡선사이의 넓이, 속도와 거리 등을 묻는 문제가 출제되고 있다. 2017학년도 수능에서는 수직선 위를 움직이는 점의 속도가 주어졌을 때, 점이 움직인 거리를 구하는 문제가 출제되었다.

EBS연계교재 문제들을 꼼꼼히 풀어보는 것이 중요하며 3개년 기출문항을 꼼꼼히 풀어보는 것이 중요하다. 단순히 두 곡선사이의 넓이를 구하는 것이 아닌 주어진 조건에서의 최대, 최소 넓이를 구하는 활용문제 역시 다루어 보는 것이 필요하고 정적분과 미분사이의 관계를 활용하는 문제는 미리 점검해 두어야 할 것이다.

출제경향포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2015수능. A형. 6번	정적분의 계산을 묻는 문항(정답형 3점)
2015수능. A형. 20번	정적분과 넓이의 관계를 이용하여 정적분의 계산을 묻는 문항(정답형 4점)
2015수능. A형. 26번	부정적분의 이해에 대한 문항(단답형 4점)
2016수능. A형. 13번	정적분을 이용한 주어진 그래프의 넓이 구하는 문항(정답형 3점)
2016수능. A형. 20번	조건을 만족시키는 다항함수를 이용하여 정적분 값 구하는 문항(정답형 4점)
2017수능. 나형. 9번	정적분의 계산을 묻는 문항(정답형 3점)
2017수능. 나형. 12번	정적분과 거리와 관계를 이용하여 정적분의 계산을 묻는 문항(정답형 3점)
2017수능. 나형. 20번	도함수와 정적분의 성질을 이용하여 해결하는 문항(정답형 4점)

08 부정적분과 정적분

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 미적분 I 171쪽 예제1번

다항함수 $f(x)$와 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $F(2)$의 값은?

(가) $f'(x)=2x$ (나) $f(0)=F(0)$ (다) $f(3)=F(3)$

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

EBS 문항 분석

가. 부정적분과 미분의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면 $\int f(x)dx=F(x)+C$ (C는 적분상수) 임을 이용하여 문제를 해결한다.

다시 보는 개념 !!

가. 부정적분의 뜻

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 하고, 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.

또, 함수 $F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분일 때, $f(x)$의 임의의 부정적분은 $F(x)+C$ (C는 상수) 꼴로 나타내어진다. 즉, $\int f(x)dx=F(x)+C$이고, C를 적분상수라고 한다.

나. 부정적분과 미분의 관계

(1) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$

(2) $\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C$ (단, C는 적분상수)

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

2017년 수능특강 미적분 I 173쪽 유제4번

함수 $f(x)=\int_2^x (t^2-4t+3)dt$ 는 $x=a$ 에서 극댓값 b 를 갖는다. $a+b$ 의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{17}{3}$

EBS 문항 분석

가. 정적분과 미분의 관계를 이용하여 해결하는 문제이다.

나. 함수 $f(x)$ 의 도함수를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내어 극댓값을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ 의 값이 항상 존재한다.

이 극한값을 함수 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분이라 하고, 이것을 기호로 $\int_a^b f(x)dx$ 와 같이 나타낸다. 즉

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \left(\text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

이 때 $\int_a^b f(x)dx$ 의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$ 를 a 에서 b 까지 적분한다고 한다.

나. 정적분과 미분의 관계

(1) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (\text{단, } a<x<b)$$

(2) $\int_a^a f(x)dx=0$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능완성 수학나형 94쪽 6번

$\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+1}dx - \int_0^2 \frac{t^4+t}{t^2+1}dt$의 값은?

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{6}$

EBS 문항 분석

가. 정적분의 성질을 이용하여 함수의 정적분을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 두 정적분을 같은 문자에 관한 식으로 바꾼 뒤 정적분의 성질을 이용하여 계산하면 쉽게 해결할 수 있다. 정적분의 성질을 이해하고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제가 출제된다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

나. 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

2017년 수능완성 수학나형 95쪽 10번

함수 $f(x)=3x^2+ax+b$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx$

(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 4이다.

$\int_0^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

EBS 문항 분석

가. 함수의 그래프의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 함수 $f(x)$가 이차함수이므로 조건에 의해 $f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대칭이라는 것과 최솟값이 4임을 이용하면 함수 $f(x)$의 식을 구성하여 적분값을 계산할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭,

즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$일 때 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

나. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭,

즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$일 때 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 | 2017 수능특강 미적분 I 171쪽 유제2번 변형

다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=x^2-ax+3$이고 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 3을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

풀 이

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+\int_0^1 x^2 f(t)dt+x=0$을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

풀 이

함수 $f(x)$가

$$f(x)=(3x^2+4x)\int_0^1 f(t)dt+6$$

을 만족시킬 때, $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값을 구하시오.

풀 이

$\int_{-3}^{3}(ax^3+ax^2+ax)dx=36$ 일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

09 정적분의 활용

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 미적분Ⅰ 186쪽 1번

곡선 $y=x^3(x-1)$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

EBS 문항 분석

가. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 함수 $f(x)$의 그래프를 좌표평면에 그려서 구하고자 하는 부분이 무엇인지 파악하면 간단히 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

함수 $y=f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고, 함수 $x=g(y)$는 닫힌 구간 $[c, d]$에서 연속일 때

(1) 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

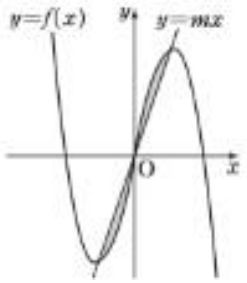
(2) 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_c^d |g(y)|dy$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

2017년 수능특강 미적분 I 183쪽 유제4번

그림과 같이 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 세 점에서 만난다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-mx=-x(x+1)(x-1)$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, $m>0$)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

EBS 문항 분석

가. 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이라는 것과 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$가 만나는 점의 x좌표가 $-1, 0, 1$임을 이용하여 적분값을 구한다.

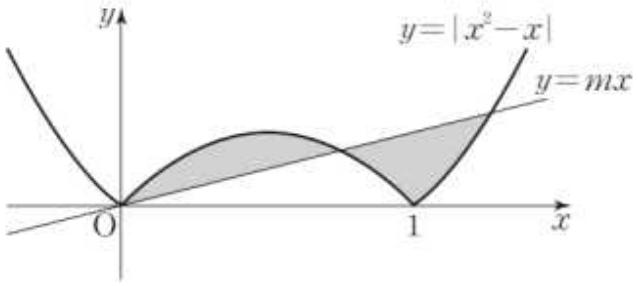
다시 보는 개념 !!

두 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

2017년 수능완성 미적분 I 100쪽 24번

그림과 같이 함수 $y=|x^2-x|$ 의 그래프와 직선 $y=mx\ (m>0)$ 으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같을 때, 상수 m 의 값은?



① $\sqrt[3]{2}-1$ ② $\sqrt[3]{3}-1$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

EBS 문항 분석

가. 도형의 넓이 사이의 관계와 정적분을 이용하여 상수의 값을 구하는 문제이다.

나. 함수 $y=|x^2-x|$ 의 그래프와 직선 $y=mx\ (m>0)$ 으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 적분값이 0 임을 이용하여 문제를 해결한다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=0$$

나. 역함수와 넓이의 관계

연속함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하고, 두 곡선 $y=f(x), g(x)$ 의 두 교점이 직선 $y=x$ 위에 있을 때, 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=2\int_a^b |x-f(x)|dx \ (\text{단, } f(a)=g(a),\ f(b)=g(b))$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

2017년 수능완성 미적분 I 101쪽 26번

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=-t^2+at$이고, $t=3$일 때 다시 원점을 지난다. $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는?
(단, a는 상수이다.)

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{11}{6}$ ⑤ 2

EBS 문항 분석

가. 직선운동을 하는 물체의 시각 t에서의 속도가 주어졌을 때, 속도의 적분이 물체가 움직인 거리라는 것을 알고 있어야 해결할 수 있다.

나. 수직선 위를 움직이는 점 또는 물체의 시각 t에서의 속도에 대한 식이나 그래프가 주어질 때, 점 또는 물체의 위치, 위치의 변화량, 움직인 거리를 구하는 문제가 출제된다.

다. 속도를 나타내는 함수의 그래프와 t축 사이의 넓이를 이용하여 문제를 해결한다.

다시 보는 개념 !!

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때,
시각 $t=a$에서 시각 $t=b$ $(a \le b)$까지

(1) 점 P의 위치의 변화량 : $\int_a^b v(t)dt$

(2) 점 P가 움직인 거리 : $\int_a^b |v(t)|dt$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학나형 12번

수직선 위를 움직이는 점 P 이 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = -2t + 4$$

이다. $t = 0$ 부터 $t = 4$ 까지 점 P 가 움직인 거리는? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

EBS 교재 2016 수능완성 수학나형 99쪽 26번

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = 3t^2 - 2t$ 일 때, 출발 후 점 P 가 운동 방향이 바뀌는 순간까지 움직인 거리는?

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{5}{27}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있으나 기출문항은 시각이 주어진 반면 연계문항은 수직선 위를 움직이는 점의 운동 방향이 바뀌는 순간을 구하여 적분값을 계산해야 하는 문항이다.

문항풀이 Point !!

수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 속도가 $v(t)$ 일 때,
시각 $t = a$ 에서 시각 $t = b$ $(a \leq b)$ 까지

(1) 점 P 의 위치의 변화량 : $\int_a^b v(t)dt$

(2) 점 P 가 움직인 거리 : $\int_a^b |v(t)|dt$

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 | 2017 수능특강 미적분 I 181쪽 유제2번 변형

곡선 $y=x^3$과 y축 및 직선 $y=8$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

풀 이

정의역이 $\{x|x \geq 0\}$인 함수 $f(x)=ax^2$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 직선 $y=x$와 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{6}$일 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도가 각각

$$v_P = at,\ v_Q = 3t^2 - 2t$$

이다. $t=2$일 때, 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만난다. $t=3$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오. (단, a는 상수이다.)

풀 이

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-t^3+4$$

이다. $t=2$일 때 점 P의 위치를 구하시오.

풀 이

Ⅴ. 집합과 명제

기출 문항 분석

2005학년도부터 2016학년도까지 수능의 수학영역에서는 1학년 수학에 해당되는 공통과정이 출제되지 않았고 개정교육과정이 적용된 2017학년도 수능의 수학(나형)에서 수학Ⅱ에서 다뤄지는 집합과 명제가 출제되었다. 2004학년도 수능이전에는 집합의 연산, 집합의 포함관계, 벤다이어그램, 집합의 원소의 개수, 부분집합의 개수, 명제의 참과 거짓이 되는 조건, 필요조건과 충분조건 등에 관하여 주로 출제되었고 이는 2017학년도 수능 수학(나형)에서도 마찬가지로, 정답형 2문항과 단답형 1문항이 각각 출제 되었다. 집합에 관련된 기본 내용은 방정식, 부등식, 확률과 통계 등 수학교과의 다른 부분에 많이 활용되고 있으므로 반드시 익혀둘 필요가 있다.

출제경향포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2003수능. 인문계. 5번	명제의 참, 거짓과 진리집합의 참, 거짓을 구하는 문제 (합답형 2점)
2003수능. 인문계. 13번	부등식을 만족하는 필요충분조건을 구하는 문제 (정답형 3점)
2003수능. 인문계. 25번	합집합의 원소의 개수를 구하는 문제 (단답형 2점)
2004수능. 인문계. 12번	자연수의 거듭제곱을 집합으로 정의하여 관계를 구하는 문제 (정답형 3점)
2004수능. 인문계. 28번	집합의 합집합, 교집합의 원소의 개수의 최솟값을 구하는 문제 (단답형 3점)
2017수능. 나형. 2번	합집합의 원소의 개수를 구하는 문제 (단답형 2점)
2017수능. 나형. 7번	충분조건이 되도록 하는 최소의 진리집합을 구하는 문제 (정답형 3점)
2017수능. 나형. 24번	집합의 연산 결과를 만족하는 원소를 구하는 문제 (단답형 3점)

10 집합

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 수학II&미적분I 7쪽 예제 1번

실수 전체의 집합의 두 부분집합

$$A=\{x|x^2-(a-1)x+2a-6=0\},\ B=\{a+2,\ 0,\ a^2-7\}$$

에 대하여 $A\subset B$를 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 집합의 포함관계를 묻는 문제이다.

나. 두 집합의 원소를 각각 구한 후 부분집합의 관계가 성립하도록 실수 a의 값을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 부분집합

집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소일 때, 즉 집합 A의 임의의 원소 a에 대하여 $a\in B$일 때, 집합 A는 집합 B의 부분집합이라 하고 이것을 기호로 $A\subset B$와 같이 나타낸다. 또한 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아닐 때, 이것을 기호로 $A\not\subset B$와 같이 나타낸다.

나. 부분집합의 성질

1) $\varnothing\subset A,\ A\subset A$

2) $A\subset B,\ B\subset C$이면 $A\subset C$

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U의 부분집합 A의 개수는?

(가) $\{1, 2, 3\} \cap A \neq \varnothing$ (나) $\{4, 5\} \cap A = \varnothing$

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

EBS 문항 분석

가. 주어진 조건을 만족하는 부분집합의 개수를 구하는 문제이다.

나. 집합 A가 포함해야 하는 원소와 집합 A가 포함하지 않는 원소를 구분하고 이를 만족하는 부분집합의 개수를 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

가. 집합 A의 부분집합의 개수 : 2^n

나. 집합 A의 진부분집합의 개수 : 2^n-1

다. k개의 특정한 원소를 포함하는(포함하지 않는) 집합 A의 부분집합의 개수 : 2^{n-k} (단, $1 \le k \le n$)

라. k개의 특정한 원소 중 적어도 한 개를 포함하는 집합 A의 부분집합의 개수 : 2^n-2^{n-k} (단, $1 \le k \le n$)

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능완성 수학 나형 9쪽 12번

전체집합 $U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$의 부분집합 $A=\{b,\ e,\ f\}$에 대하여

$$A\cap\{(A\cap B)\cup(B-A)\}=\{e\}$$

를 만족시키는 U의 부분집합 B의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

EBS 문항 분석

가. 집합의 연산법칙을 이용하여 문제를 해결해야 한다.

나. 집합의 연산법칙을 이용하여 주어진 조건식의 좌변을 간단히 한 후, 조건을 만족하는 부분집합의 개수를 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 집합의 연산법칙

세 집합 A, B, C에 대하여

1) 교환법칙 : $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

2) 결합법칙 : $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

3) 분배법칙 : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

나. 드모르간의 법칙

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

1) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

2) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

2017년 수능완성 수학 나형 10쪽 18번

스포츠클럽 100명의 회원 중 축구 회원은 72명, 농구 회원은 51명, 축구와 농구에 모두 가입한 회원은 x명이다. x의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 66 ② 68 ③ 70 ④ 72 ⑤ 74

EBS 문항 분석

가. 집합의 연산법칙과 원소의 개수를 구하는 공식을 이용하여 실생활 문제를 해결하는 것으로 출제 가능성이 높은 유형이다.

나. 문제에 제시된 각각의 조건을 집합으로 나타내고, 집합의 원소를 구하는 공식을 이용한다.

다. 합집합과 교집합의 원소의 개수에 관한 공식을 알고 있어야 풀 수 있다.

라. 벤다이어그램을 이용하거나 각 영역을 문자로 표현한 후 방정식으로 풀 수도 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 유한집합 A, B에 대하여 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

특히 두 집합 A, B가 서로소이면 $n(A\cap B)=0$이므로 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

나. 원소가 유한개인 전체집합 U와 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

1) $n(A^c)=n(U)-n(A)$

$n((A\cup B)^c)=n(U)-n(A\cup B)$

2) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=n(A\cup B)-n(B)$

특히 $B\subset A$이면 $n(A-B)=n(A)-n(B)$

3) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능완성 수학 나형 7쪽 7번 변형

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$의 세 부분집합

$A=\{x|x$는 짝수$\}$,

$B=\{x|x$는 3의 배수$\}$,

$C=\{x|x$는 홀수의 2배인 수$\}$

에 대하여 집합 $S=(A-C)\cap(B-C)$의 원소의 개수 $n(S)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

풀 이

실수 전체의 집합의 두 부분집합 $A=\{-2,\ 2\}$, $B=\{x|x^2=ax+a\}$에 대하여 $A\cup B=A$가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① -10 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 10

풀 이

어느 고등학교 2학년 학생 전체를 대상으로 스포츠 관련 동아리 신청자, 학술 관련 동아리 신청자와 예술 관련 동아리 신청자를 조사하였다. 그 결과 스포츠 관련 동아리, 학술 관련 동아리와 예술 관련 동아리를 신청한 학생은 각각 2학년 전체 학생의 $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{32}$ 이었고, 모두 신청하지 않았다고 대답한 학생은 11이었다. 또 스포츠 관련 동아리와 학술 관련 동아리 모두 신청한 학생은 전체 학생의 $\frac{3}{8}$ 이고, 예술 관련 동아리를 신청한 학생 중 다른 동아리를 신청한 학생은 없었다. 이 고등학교 2학년 학생 중 학술 관련 동아리를 신청한 학생의 수는?

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

풀 이

세 집합

$A = \{-5, -3, -1, 1\}$

$B = \{x | x$는 $x^2 - 3x - 4 \le 0$을 만족시키는 정수$\}$

$C = \{x | x$는 $|x-1| < k$ (k는 양의 정수)를 만족시키는 정수$\}$

에 대하여

$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$,

$(B - C) \cup (B \cap C) \cup C = C$

를 만족시키는 양의 정수 k의 최솟값을 구하시오.

풀 이

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 2번

두 집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

에 대하여 $n(A\cup B)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

EBS 교재 2016 수능완성 수학 나형 [실전편] 2회 2번

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2\},\ B=\{2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 집합 $A^C\cup B$의 원소의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항이 연계문항에 비해 좀 더 간단하게 출제가 되었다.

다. 집합의 연산과 그 결과 원소 또는 원소의 개수를 구하는 기본적인 문제라고 볼 수 있다. 집합은 방정식이나 부등식, 확률과 같은 수학의 다른 영역에서도 쓰이지만 집합에 대한 기본적인 개념이나 연산, 원리를 물어보는 단독 문항으로도 꾸준히 출제가 되는 영역이다.

문항풀이 Point !!

집합의 연산을 할 수 있어야 하고 원소의 개수에 대한 내용을 알고 있어야 한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 24번

전체집합 $U=\{x \mid x$는 9이하의 자연수 $\}$의 두 부분집합

$$A=\{3,\ 6,\ 7\},\ B=\{a-4,\ 8,\ 9\}$$

에 대하여

$$A\cap B^C=\{6,\ 7\}$$

이다. 자연수 a의 값을 구하시오. [3점]

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 9쪽 유제 3번

두 집합

$$A=\{1,\ 3,\ a^2+a\},\ B=\{2,\ a+1,\ b-1\}$$

에 대하여 $A\cap B=\{3,\ 6\}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 난이도도 비슷하게 출제되었다.

다. 집합의 연산결과를 만족하도록 미지수를 구하는 문제이다. 두 집합의 원소를 비교하며 방정식을 풀어서 문제를 해결한다.

문항풀이 Point !!

집합의 연산에 대해 이해하고 여집합과 차집합의 성질을 정확하게 이해하는 것이 가장 중요하다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2018학년도 6월 모의평가 수학 나형 2번

두 집합

$A=\{1,\ 2\}$ $B=\{1,\ 2,\ 4\}$

에 대하여 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 12쪽 1번

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 $B-A$의 모든 원소의 합은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항과 연계문항의 난이도는 유사하다.

다. 집합의 연산과 그 결과 원소 또는 원소의 개수를 구하는 기본적인 문제라고 볼 수 있다. 집합은 방정식이나 부등식, 확률과 같은 수학의 다른 영역에서도 쓰이지만 집합에 대한 기본적인 개념이나 연산, 원리를 물어보는 단독 문항으로도 꾸준히 출제가 되는 영역이다.

문항풀이 Point !!

집합의 기본적인 연산에 대해 이해하고 있어야 한다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2018학년도 6월 모의평가 수학 나형 24번

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 A에 대하여

$\{1,\ 2,\ 3\}\cap A=\varnothing$

을 만족시키는 모든 집합 A의 개수를 구하시오.

EBS 교재 2016 수능완성 수학 나형[유형편] 필수 유형

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 두 부분집합

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에 대하여

$A\cup C=B\cup C$를 만족시키는 전체집합 U의 부분집합 C의 개수는?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항이 연계문항보다 다소 쉬운 편이다.

다. 조건을 만족하는 부분집합의 개수를 구하는 문제는 조건을 집합의 연산을 이용하여 나타내고 이 연산의 결과를 만족하는 부분집합의 개수를 물어보는 유형으로 출제된다.

라. 부분집합의 개수에 대한 내용뿐만 아니라 집합의 연산에 대한 내용도 함께 물어볼 수 있는 문제이므로 집합 단원에서 챙겨봐야 할 필수적인 유형이라고 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

특정한 원소를 포함하는(포함하지 않는) 부분집합의 개수를 구할 수 있어야 한다.

11 명제

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 17쪽 유제 2번

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같을 때, 다음 중 참인 명제는?

$$p : 2x-1 \geq 7 \qquad q : |x-1| < 3$$

① $p \rightarrow q$ ② $q \rightarrow p$ ③ $q \rightarrow \sim p$ ④ $\sim p \rightarrow q$ ⑤ $\sim q \rightarrow p$

EBS 문항 분석

가. 명제의 참, 거짓을 판별하는 문제이다.

나. 조건과 그 진리집합의 관계를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별하면 된다.

다시 보는 개념 !!

가. 명제와 조건의 부정

1) 명제나 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 명제나 조건 p의 부정이라 하고, 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다.

2) 명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이 되고 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이 된다.

3) 조건 p의 진리집합이 P이면 $\sim p$의 진리집합은 P^c이다.

나. 명제 $p \rightarrow q$의 참, 거짓

1) 두 조건 p, q에 대하여 'p이면 q이다.'의 꼴로 되어 있는 명제를 기호로 $p \rightarrow q$와 같이 나타낸다. 이때 조건 p를 가정, 조건 q를 결론이라고 한다.

2) 명제 $p \rightarrow q$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

① 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이다. 역으로 $P \subset Q$이면 명제 $p \rightarrow q$가 참이다.

② 명제 $p \rightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이다. 역으로 $P \not\subset Q$이면 명제 $p \rightarrow q$가 거짓이다.

2017년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 22쪽 2번

세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제

$\sim p \rightarrow q$, $r \rightarrow \sim p$

가 모두 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $p \rightarrow \sim q$ ② $q \rightarrow r$ ③ $\sim q \rightarrow \sim r$

④ $r \rightarrow \sim q$ ⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

EBS 문항 분석

가. 명제의 역과 대우에 대한 문제이다.

나. 조건과 그 진리집합의 관계를 이해하고 이를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있어야 한다.

다. 명제의 참, 거짓과 그 대우의 참, 거짓이 항상 일치함과 삼단논법을 알고 있으면 쉽게 풀 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 명제의 역과 대우

1) 역 : 명제 $p \rightarrow q$에서 가정과 결론을 서로 바꾸어 놓은 명제 $q \rightarrow p$를 명제 $p \rightarrow q$의 역이라고 한다.

2) 대우 : 명제 $p \rightarrow q$에서 가정과 결론을 각각 부정하여 서로 바꾸어 놓은 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$를 명제 $p \rightarrow q$의 대우라고 한다.

나. 명제와 그 대우의 참, 거짓

1) 명제 $p \rightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$도 참이다.

2) 명제 $p \rightarrow q$가 거짓이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$도 거짓이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능완성 수학 나형 12쪽 23번

다음 (가), (나)의 □안에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

(가) 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=0$은 $x+y\sqrt{3}=0$이기 위한 [ ]조건이다.
(나) 두 실수 x, y에 대하여 $x^2-y^2=0$은 $x=y$이기 위한 [ ]조건이다.

① 필요, 필요 ② 충분, 충분 ③ 충분, 필요
④ 필요, 필요충분 ⑤ 필요충분, 충분

EBS 문항 분석

가. 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건인지 필요조건인지 알아보는 문제이다.
나. 각 조건의 진리집합을 구하고 포함관계를 통해 충분조건 또는 필요조건의 관계를 판단하여 해결한다.

다시 보는 개념 !!

가. 필요조건과 충분조건
1) 명제 $p\to q$가 참일 때, 이것을 기호로 $p\Rightarrow q$와 같이 나타내고
p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건
이라고 한다.
2) 명제 $p\to q$에 대하여 $p\Rightarrow q$이고 $q\Rightarrow p$ 일 때, 이것을 기호로 $p\Leftrightarrow q$와 같이 나타내고
p는 q이기 위한 필요충분조건
이라고 한다. 이때 q도 p이기 위한 필요충분조건이다.
나. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P\subset Q$이면 $p\Rightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이고, q는 p이기 위한 필요조건이다. 특히 $P=Q$이면 $p\Leftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

다음은 a, b가 실수일 때, 부등식 $a^2+ab+b^2 \geq 3(a+b-1)$이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

$a=x+y$, $b=x-y$로 놓으면

$a^2+ab+b^2-3(a+b-1)=$ (가) $+y^2 \geq 0$

따라서 부등식 $a^2+ab+b^2 \geq 3(a+b-1)$이 성립한다.

이때 등호는 $a=$ (나), $b=$ (다)일 때 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(x)$, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 α, β라 할 때, $f(3)+\alpha+\beta$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

EBS 문항 분석

가. 실수의 성질 또는 절대부등식을 이용하는 문제이다.

나. 절대부등식을 증명하는 흐름을 이해하고 실수의 성질을 이용하여 등호가 성립하는 조건을 구하면 된다.

다시 보는 개념 !!

가. 절대부등식 : 주어진 집합의 임의의 원소에 대하여 항상 성립하는 부등식을 절대부등식이라고 한다.

나. 실수의 성질 : a, b가 실수일 때

1) $a>b \Leftrightarrow a-b>0$
2) $a^2 \geq 0$, $a^2+b^2 \geq 0$
3) $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$
4) $|a|^2=a^2$, $|ab|=|a||b|$
5) $a>0, b>0$일 때, $a>b \Leftrightarrow a^2>b^2$

다. 여러 가지 절대부등식

1) 두 실수 a, b에 대하여 $a^2-ab+b^2 \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립한다.)
2) 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0, b>0$일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 7번

실수 x에 대한 두 조건

$$p: |x-1| \le 3,$$

$$q: |x| \le a$$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능특강 수학 나형 11쪽 20번

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$$p: -3 < x < a+2, \quad q: |x-5| \ge 2$$

명제 $p \to q$가 참이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항과 연계문항의 난이도도 유사하다.

문항풀이 Point !!

조건과 그 진리집합의 관계를 이용하여 명제가 참이 되도록 하는 실수의 범위를 구한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2018학년도 6월 모의평가 수학 나형 6번

실수 x에 대한 두 조건

$$p : x^2+2x-a=0, \quad q : x-3=0$$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① 15 ② 12 ③ 9 ④ 6 ⑤ 3

EBS 교재 2016 수능완성 수학 나형 12쪽 25번

두 실수 x, y에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$$p : x=y=0, \; q : x^2+kxy+y^2=0$$

p가 q이기 위한 필요충분조건이 되도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항과 연계문항의 난이도도 유사하다.

다. 명제에서 충분조건, 필요조건을 알고 충분조건, 필요조건이 될 때 진리집합 사이의 포함관계를 정확히 알고 있어야 한다.

문항풀이 Point !!

충분조건 또는 필요조건을 만족시키는 값을 구하는 문제로 진리집합 사이의 포함관계를 이용하면 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2018학년도 6월 모의평가 수학 나형 12번

실수 a에 대하여 명제

'$a \geq \sqrt{3}$ 이면 $a^2 \geq 3$이다.'

의 대우는?

① $a^2 < 3$이면 $a > \sqrt{3}$ 이다.
② $a^2 < 3$이면 $a < \sqrt{3}$ 이다.
③ $a^2 \leq 3$이면 $a \leq \sqrt{3}$ 이다.
④ $a > \sqrt{3}$ 이면 $a^2 \leq 3$이다.
⑤ $a \geq \sqrt{3}$ 이면 $a^2 < 3$이다.

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 22쪽 2번

명제 '평행사변형이면 사다리꼴이다.'의 역의 대우는?

① 평행사변형이면 사다리꼴이다.
② 사다리꼴이면 평행사변형이다.
③ 사다리꼴이면 평행사변형이 아니다.
④ 평행사변형이 아니면 사다리꼴이 아니다.
⑤ 사다리꼴이 아니면 평행사변형이 아니다.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항과 연계문항의 난이도도 유사하다.

문항풀이 Point !!

명제의 대우를 이해하여 어떤 명제의 대우를 제시할 수 있어야 한다. 더불어 명제와 그 명제의 대우 사이에는 참과 거짓이 일치한다는 중요한 성질도 함께 알아두면 좋다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 24쪽 1번 변형

실수 x에 대한 두 조건

$$p : (x+1)^2 - a^2 < 0,\ q : |x-4| \le 2$$

에 대하여 명제 $p \to \sim q$가 참이 되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

풀 이

실수 x, y에 대한 세 조건

p : $|xy|=xy$

q : $(xy)^2>0$

r : $x^2+y^2=xy$

에 대하여 보기에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $p\rightarrow q$ ㄴ. $\sim q\rightarrow p$ ㄷ. $r\rightarrow\sim q$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

두 양수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하면?

풀 이

다음 보기에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 어떤 실수 x에 대하여 $x^2 < 1$

ㄴ. 어떤 자연수 x에 대하여 $(x^2+2)(x^2-5x+6)<0$

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-7x+13 \geq 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

풀 이

Ⅵ. 함수

기출 문항 분석

집합과 명제 단원과 마찬가지로 함수 단원은 항상 1학년 수학의 교육과정에 해당되어 2005학년도 수능부터는 출제되지 않다가 2017학년도 수능에서부터 다시 출제되기 시작하였다. 2004학년도 수능이전의 기출문제에서도 부등식의 영역, 일차함수, 이차함수, 삼차함수, 실생활 상황에서 함수를 정의하는 문제 등과 연결된 내용이 많이 출제되었으며 현재 교육과정상 수능의 출제범위에 포함되어 있는 합성함수, 역함수, 유리함수, 무리함수 부분은 출제빈도가 적었다.

2015학년도 이후 전국연합학력평가에서는 주로 합성함수, 역함수의 함숫값, 그래프를 이용한 함숫값 찾기, 유리함수와 무리함수의 평행이동, 역함수 등의 기본문제가 많이 출제되었다. 유리함수와 무리함수의 그래프와 도형의 넓이, 함수의 극한, 미분, 적분 등의 다른 단원과 연계된 문제가 출제될 것으로 예상된다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2002수능. 인문계. 5번	함수식을 만족하는 그래프를 고르는 문항(정답형 2점)
2002수능. 인문계. 21번	합성함수를 이용한 부등식의 범위를 구하는 문항(정답형 3점)
2003수능. 인문계. 3번	유리함수와 합성함수의 함숫값을 구하는 문항(정답형 2점)
2017수능. 나형. 6번	주어진 함수에서 함숫값과 역함수의 함숫값을 구하는 문제(정답형 3점)
2017수능. 나형. 10번	유리함수의 그래프의 성질을 이용하는 문제(정답형 3점)

12 함수

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능완성 수학 나형 16쪽 필수유형

집합 $X=\{0, 1, 2\}$에 대하여 세 함수 f, g, h는 각각 X에서 X로의 일대일 대응, 상수함수, 항등함수이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(1)=h(2)$
(나) $2f(1)+f(2)=f(0)$

$f(2)+g(2)+h(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 함수와 관련된 여러 가지 개념을 이해하고 있어야 한다.
나. 주어진 조건을 만족시키는 함숫값을 구할 수 있어야 한다.
나. 일대일 대응, 상수함수, 항등함수의 뜻을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 함숫값을 대응시켜 문제를 해결한다.

다시 보는 개념 !!

가. 일대일함수 : 함수 $f: X\to Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$일 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다.
나. 일대일 대응 : 일대일함수 $f: X\to Y$의 치역과 공역이 같을 때, 함수 f를 일대일 대응이라고 한다.
다. 항등함수 : 함수 $f: X\to Y$에서 정의역 X의 각 원소 x에 그 자신인 x가 대응될 때, 즉 $f(x)=x$일 때, 함수 f를 항등함수라고 한다.
라. 상수함수 : 함수 $f: X\to Y$에서 정의역 X의 모든 원소 x에 공역 Y의 단 하나의 원소 c가 대응할 때, 즉 $f(x)=c$일 때, 함수 f를 상수함수라고 한다.

2017년 수능특강 수학II&미적분I 29쪽 유제 4번

두 함수 $f(x)=\begin{cases}-x-1 & (x<0)\\ 2x-1 & (x\geq 0)\end{cases}$, $g(x)=x^2+1$에 대하여 $(f\circ g)(1)+(g\circ f)(-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 함숫값을 구하는 문제이다.

나. 구간마다 정의된 함수에서는 제시된 x의 값이 어느 구간에 속하는지 먼저 확인한 후 그 구간에서 정의된 함수의 식에 의해 함숫값을 구한다.

다. 합성함수의 함숫값을 구하는 문제로 합성함수의 성질을 정리해 둘 필요가 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 합성함수

1) 두 함수 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$에 대하여 집합 X의 임의의 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻는다. 이 함수를 함수 f와 g의 합성함수라 하고, 기호로 $g\circ f$와 같이 나타낸다.

$$g\circ f: X\to Z$$

합성함수 $g\circ f$에 의한 x의 함숫값을 $(g\circ f)(x)$와 같이 나타낸다. 즉, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$이므로 두 함수 f와 g의 합성함수를 $y=g(f(x))$로도 나타낸다.

$$(g\circ f)f(x)=g(f(x))$$

2) 세 함수 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, $h: Z\to W$의 합성함수 $h\circ g\circ f$는

$$h\circ g\circ f: X\to W,\quad (h\circ g\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x)))$$

나. 합성함수의 성질

1) $g\circ f\neq f\circ g$ (교환법칙이 성립하지 않는다.)

2) $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ (결합법칙이 성립한다.)

3) $f\circ I=I\circ f=f$ (단, I는 항등함수)

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 33쪽 4번

양의 실수 전체의 집합 X에 대하여 두 함수 $f : X \to X$, $g : X \to X$가 다음과 같다.

$$f(x) = x^2 + 2x,\ g(x) = f(x+1) - 3$$

f의 역함수를 h라 할 때, $g(h(3))$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

EBS 문항 분석

주어진 함수의 역함수를 이용하여 역함수의 함숫값을 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

가. 역함수

함수 $f : X \to Y$가 일대일 대응일 때, 집합 Y의 임의의 원소 y에 대응되는 $f(x) = y$인 집합 X의 원소 x가 오직 하나 존재한다.

따라서 집합 Y의 각 원소 y에 $f(x) = y$인 집합 X의 원소 x를 대응시키면 집합 Y를 정의역, 집합 X를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻는다. 이 함수를 함수 $f : X \to Y$의 역함수라 하고, 기호로 f^{-1}와 같이 나타낸다. 즉, $f^{-1} : Y \to X$, $x = f^{-1}(y)$이다.

나. 역함수 구하기

일반적으로 일대일 대응인 함수 $y = f(x)$의 역함수 $y = f^{-1}(x)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y = f(x) \xrightarrow[x\text{에 대하여 푼다.}]{} x = f^{-1}(y) \xrightarrow[x\text{와 } y\text{를 서로 바꾼다.}]{} y = f^{-1}(x)$$

함수 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+1(x\geq 1)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 두 점에서 만난다. 이 두 점 사이의 거리를 l이라 할 때, l^2의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 함수와 그 역함수의 그래프의 특징을 이용하여 해결할 수 있는 문제이다.

나. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 것을 이용하여 두 그래프의 교점을 찾고 이들 사이의 거리를 구하여 해결한다.

다시 보는 개념 !!

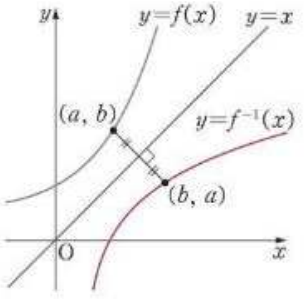
가. 역함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

나. 점 $(a,\ b)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이면 $b=f(a)$가 성립한다. 이때 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 역함수의 정의에 의하여

$$b=f(a) \Leftrightarrow a=f^{-1}(b)$$

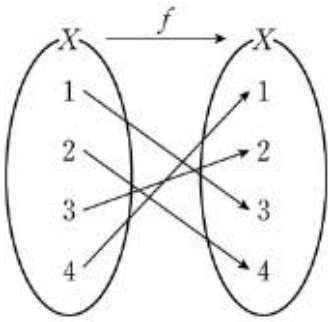
가 성립하므로 점 $(b,\ a)$는 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이다. 그런데 점 $(a,\ b)$와 점 $(b,\ a)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 6번

그림은 함수 $f : X \to X$를 나타낸 것이다.



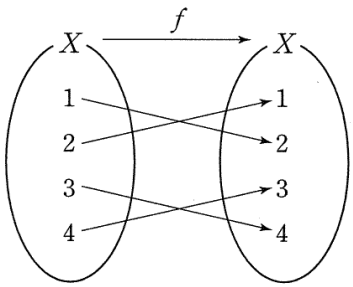
$f(2)+f^{-1}(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 32쪽 4번

그림은 함수 $f : X \to X$를 나타낸 것이다.

$(f \circ f)(1)+f^{-1}(4)$의 값은?



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항과 연계문항의 난이도도 유사하다.

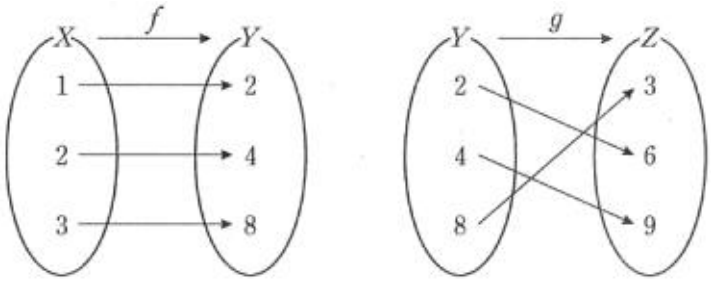
문항풀이 Point !!

함숫값 구하기, 역함수의 함숫값 구하기처럼 기본적인 문항도 출제될 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2018학년도 6월 모의평가 수학 나형 4번

그림은 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$를 나타낸 것이다.

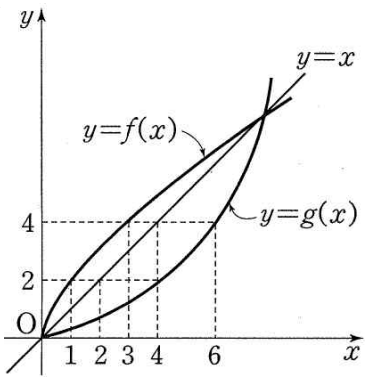


$(g \circ f)(1)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 33쪽 4번

그림은 역함수가 존재하는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다.



$g(4)+f^{-1}(2)+(f^{-1} \circ g)^{-1}(3)$

의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항과 연계문항의 난이도도 유사하다.

문항풀이 Point !!

함숫값 구하기, 역함수의 함숫값 구하기처럼 기본적인 문항도 출제될 수 있다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2018학년도 6월 모의평가 수학 나형 11번

두 함수

$$f(x)=x^3+1,\quad g(x)=x-4$$

에 대하여 $(g^{-1}\circ f)(-1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능완성 수학 나형 [실전편] 1회 25번

두 함수 $f(x)=3x-2$, $g(x)=ax+5$에 대하여 $(f\circ g)(2)=25$일 때, $(g\circ f)^{-1}(19)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, f^{-1}는 f의 역함수이다.)

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항과 연계문항의 난이도도 유사하다.

문항풀이 Point !!

합성함수의 함숫값을 구하거나 역함수의 함숫값을 구하는 문제가 꾸준히 출제되고 있다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 33쪽 2번 변형

실수 전체의 집합의 두 부분집합 $X=\{x|x^2-7x+10\le 0\}$, $Y=\{x|x^2+ax+32\le 0\}$과 함수 $f:X\to Y$가 다음 조건을 만족시킨다.

㈎ $X\cap Y=\{x|4\le x\le b\}$
㈏ 함수 f의 역함수가 존재한다.
㈐ 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$

$a+b+f(2)+f(5)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

풀 이

음이 아닌 정수 전체의 집합 X에 대하여 함수 $f : X \to X$가 $f(1)=1$이고 집합 X의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $f(f(a)+b)=f(a)+f(f(b))$를 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. $f(2)=2$
ㄷ. $f(n)=n \ (n \in X)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

두 함수 $f(x)=4x+1$, $g(x)=2x-3$에 대하여 일차함수 $h(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $g(h(x))=f(x)$를 만족시킨다. $h(1)$의 값은?

풀 이

실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & (x<2) \\ x^2-ax+b & (x\geq 2) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 음이 아닌 실수 a, b에 대하여, a^2-3b의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$ 가 다음 조건 (i), (ii)을 만족할 때 옳은 것을 모두 고르면?

(i) 집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$이다.

(ii) 집합 X의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

ㄱ. $f(0)=0$

ㄴ. $f(-x)=-f(x)$

ㄷ. $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

13 유리함수와 무리함수

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능완성 수학 나형 23쪽 27번

함수 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$의 그래프가 서로 다른 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$에 대하여 대칭일 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

유리함수의 그래프에 대한 문제로 유리함수의 그래프는 점근선, 대칭점, 대칭축에 대해 특징이 있으므로 이를 중심으로 그래프의 성질을 잘 정리해둘 필요가 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}\,(k\neq 0)$의 그래프

1) 정의역과 치역은 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
2) 원점과 직선, $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이다.
3) 점근선은 x축($y=0$)과 y축($x=0$)이다.

나. $y=\dfrac{k}{x-p}+q\,(k\neq 0)$ 의 그래프

1) 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 $y=\dfrac{k}{x-p}+p$의 그래프의 특징은 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프의 특징에서 평행이동을 고려하여 얻어질 수 있다.
2) $y=\dfrac{k}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

3) 점 $(p,\ q)$ 에 대하여 대칭인 직각쌍곡선이다.

4) 점근선은 두 직선 $x=p,\ y=q$ 이다.

5) 정의역은 $\{x \mid x \neq p$ 인 모든 실수$\}$, 치역은 $\{y \mid y \neq q$ 인 모든 실수$\}$

6) 두 점근선의 교점 $(p,\ q)$ 를 지나고 기울기가 ± 1 인 직선, 즉 $y=\pm(x-p)+q$ 에 대하여 대칭이다.

다. 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\,(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$ 의 그래프

1) 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\,(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$ 의 그래프는 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\,(k\neq 0)$ 의 꼴로 변형한 다음 $y=\dfrac{k}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여 그릴 수 있다.

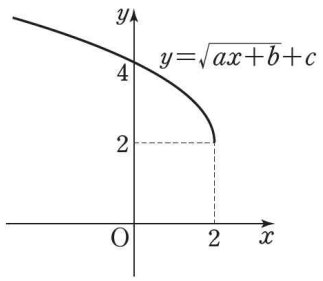
2) 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 의 정의역은 $\{x \mid cx+d\neq 0$ 인 실수$\}$ 이고, 치역은 $\left\{y \mid y\neq \dfrac{a}{c}$ 인 실수$\right\}$ 이다. 또한 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

2017년 수능특강 수학II&미적분I 41쪽 유제 5번

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



EBS 문항 분석

가. 무리함수의 그래프를 통해 무리함수 식에 대한 정보를 파악하는 문제이다.

나. 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 꼴로 변형하고 그래프와 식을 비교하면 미정계수를 쉽게 찾을 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq 0)$의 그래프

1) 함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.

2) 정의역은 $\{x|a(x-p)\geq 0\}$, 치역은 $\{y|y\geq q\}$이다.

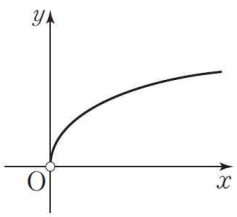
나. 함수 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq 0)$

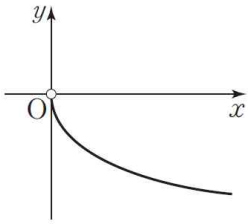
1) 함수 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$ 의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.

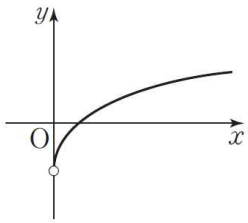
2) 정의역은 $\{x|a(x-p)\geq 0\}$, 치역은 $\{y|y\leq q\}$이다.

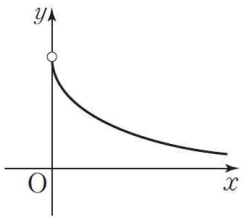
다. 일반적으로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c(a\neq 0)$의 그래프는 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ 의 꼴로 변형하여 그릴 수 있다.

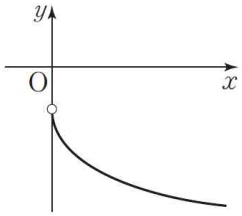
x축 위의 두 점 $A(2, 0)$, $B(5, 0)$을 잇는 선분 AB를 $x:1$ $(x>0)$으로 내분하는 점 P의 x좌표를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y=-\sqrt{(1+x)f(x)}$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

EBS 문항 분석

가. 유리함수와 무리함수를 동시에 물어보는 문제이다.

나. 내분점의 자취를 나타내는 방정식과 같이 유리함수로 나타낼 수 있는 상황을 설정하여 직접 식을 유도하도록 하고 있다.

다. 유리함수, 무리함수의 그래프에 대해서는 반드시 이해하고 있을 필요가 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 내분점, 외분점

나. 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq 0)$의 그래프

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$와 같이 변형되므로 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

두 함수 $y=\sqrt{x+2}$, $y=\sqrt{x-4}$의 그래프와 x축 및 직선 $y=\sqrt{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

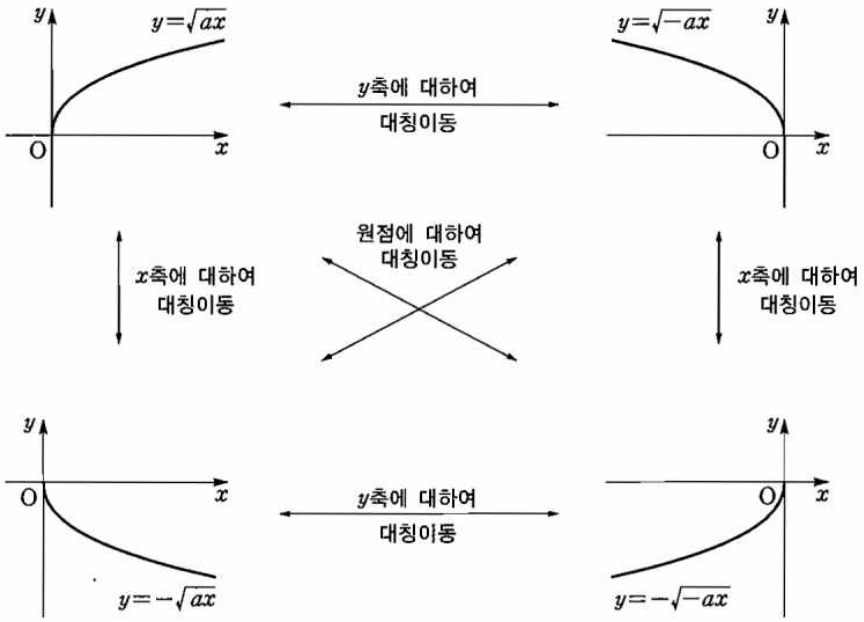
① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{2}$

EBS 문항 분석

무리함수의 그래프에 대한 충분한 이해를 바탕으로 개형을 그려 도형의 평행이동을 통해 주어진 영역의 넓이를 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프



나. 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq 0)$의 그래프

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$와 같이 변형되므로 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 10번

좌표평면에서 함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능완성 수학 나형 [유형편] 23쪽 필수유형

유리함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프가 직선 $y=ax$에 대하여 대칭이 되는 상수 a의 값을 모두 구하면?

① $-1,\ 1$ ② $-2,\ 2$ ③ $-3,\ 3$ ④ $-4,\ 4$ ⑤ $-5,\ 5$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

1) 정의역과 치역은 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
2) 원점과 직선, $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이다.
3) 점근선은 x축($y=0$)과 y축($x=0$)이다.

다. 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 $y=\frac{k}{x-p}+p$의 그래프의 특징은 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프의 특징에서 평행이동을 고려하여 얻어질 수 있다. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항은 연계문항보다 좀 더 깊은 사고를 요하고 있다.

문항풀이 Point !!

유리함수의 그래프의 특징에 대해 충분히 이해를 하고 있어야 한다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2018학년도 6월 모의평가 수학 나형 13번

함수 $y=\dfrac{4x-5}{x-1}$ 의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(a,\ b)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능완성 수학 II [실전편] 3회 5번

유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+2}{x-5}$ 의 그래프의 두 점근선이 만나는 점의 좌표가 $(b,\ 5)$ 일 때, 두 상수 $a,\ b$의 곱 ab의 값은? $\left(\text{ 단, } a\neq-\dfrac{2}{5}\right)$

① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq0,\ ad-bc\neq0)$의 그래프는 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$ 의 꼴로 변형한 다음 함수 $y=\dfrac{k}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여 그릴 수 있다.

다. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 의 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$ 이다. 기출문항은 EBS교재의 연계문항과 같은 원리를 이용하여 문제풀이에 접근할 수 있도록 출제되었고 난이도 또한 두 문항이 비슷하다.

문항풀이 Point !!

유리함수 그래프의 기본적인 특징에 대해서 충분히 이해할 필요가 있다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2018학년도 6월 모의평가 수학 나형 21번

함수

$$f(x)=\frac{k}{x-11}+6 \quad (k \geq 36)$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 개수는?

> $|f(x)| \leq y \leq -x+5$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는 2 이상 4 이하이다.

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

EBS 문항 분석

가. 주어진 부등식을 만족하는 자연수 k의 개수를 찾는 문제이다.

나. 유리함수 그래프는 물론 절댓값을 포함한 함수의 그래프의 개형도 그릴 수 있어야 한다.

다. 절댓값을 포함한 유리함수의 그래프와 일차함수의 그래프 개형을 파악하여 제시된 부등식을 만족하는 영역을 나타내고 영역 내의 자연수 순서쌍이 2개 이상 4개 이하가 되도록 k의 값을 유추한다.

라. 조건을 만족하는 자연수 순서쌍 또는 정수 순서쌍을 찾는 문제는 종종 출제되고 있다. 제시된 조건을 그래프의 개형을 이용하여 시각적으로 나타내었을 때 해를 찾는데 도움이 될 수도 있다.

문항풀이 Point !!

유리함수의 그래프는 곡선이므로 곡선의 특징이 드러나도록 개형을 그려야 하고 곡선으로 그려진 영역의 경계에 가까운 자연수 순서쌍이 제시된 부등식을 만족하는 영역에 포함되는지 확인하기 위해서는 유리함수식을 계산하여 함숫값을 구해야 한다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2018학년도 6월 모의평가 수학 나형 27번

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후, y축에 대하여 대칭이동 하였더니 함수 $y=\sqrt{-2x+9}+6$의 그래프와 일치하였다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 41쪽 유제 6번

함수 $y=\sqrt{px+9}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 함수 $y=3\sqrt{x}$의 그래프와 일치하였다. $m+n+p$의 값은?(단, m, n, p는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 무리함수 그래프의 평행이동과 대칭이동을 이용하는 문제이다.

다. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있고 기출문항과 연계문항의 난이도도 유사하다.

문항풀이 Point !!

무리함수 그래프의 특징을 이해하고 $y=\sqrt{ax}$ 그래프를 평행이동하거나 대칭이동한 식을 구할 수 있어야 한다.

EBS연계 예상문항

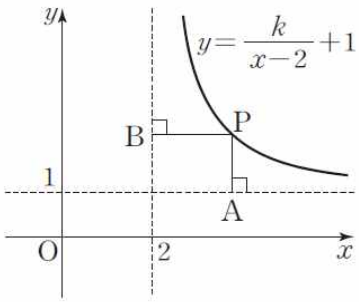
2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 43쪽 1번 변형

함수 $f(x)=\dfrac{ax-1}{bx+1}$의 정의역과 치역이 같고, 함수 f의 그래프는 $y=\dfrac{24}{25x}$를 평행이동시킨 것이라고 할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $b<0$, $a+b\neq 0$이다.)

① $-\dfrac{8}{3}$ ② $-\dfrac{4}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{8}{3}$

풀 이

함수 $y=\frac{k}{x-2}+1(x>2)$의 그래프 위의 한 점 P에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. $\overline{PA}+\overline{PB}$의 값이 최솟값이 6일 때, 점 P의 x좌표는?



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

풀 이

함수 $y=x^2+\frac{1}{2}$의 그래프와 직선 $y=2x+\frac{s}{5}$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나도록 하는 실수 s에 대하여 이 두 점 A, B 사이의 거리를 $f(s)$라 하자. 함수 $t=f(s)$에 대하여 연립부등식 $t<f(s)$, $t>0$, $-2.5<s<0$이 나타내는 영역을 D라 할 때, 영역 D에 포함된 점 중에서 s좌표와 t좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하시오.

풀 이

함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+k$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 상수 k의 값은?

① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

풀 이

Ⅶ. 수열

기출 문항 분석

이 단원에서는 최근 3년 동안 매년 등차수열 1문제, 등비수열 1문제가 어렵지 않게 출제되었고, 2년에 한번 꼴로 수열의 합과 일반항 사이의 관계식을 이용한 문제 또는 시그마의 성질 및 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하는 문제가 출제되었다.

최근 들어서는 기본적인 등차수열과 등비수열의 일반항을 이용한 문제와 등차중항, 등비중항을 이용한 관계식을 통해 특정한 항을 구하는 형식의 문제가 주로 출제되고 있다. 그리고 최근까지 3점 문제만 나오다가 2017년 대수능에서는 절댓값이 포함된 등식이 조건으로 주어지고 이를 통해 특정한 항을 구하는 문제가 4점으로 출제되었다. 따라서 언제든지 변별력을 주는 문제로 출제될 수 있기에 다음과 같은 기본 개념을 숙지하고 주어진 값을 정확하게 구하는 연습을 해 둘 필요가 있다.

주요 개념으로는 등차수열과 등비수열의 뜻과 일반항, 등차중항, 등비중항, 등차수열과 등비수열의 합, 수열의 합, S_n과 a_n 사이의 관계, 합의 기호 Σ의 뜻과 성질, 자연수의 거듭제곱의 합, 일반항이 분수꼴인 수열의 합, 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의, 귀납적으로 정의된 여러 가지 수열, 수학적 귀납법이 있다.

보통은 주어진 문제를 이해하고 식으로 표현할 수 있어야 하며 여러 가지 문제 상황을 수열로 나타내어 해결할 수 있어야 한다.

여러 가지 수열에 대한 복잡한 문제는 지수와 로그 또는 도형에 대한 내용과 연계되어 나오는 경향이 있고, 함수의 성질, 도형의 넓이나 길이에 대하여도 값을 정확하게 구할 수 있어야 한다. 일부 문제들은 문제 상황에 맞게 값들을 나열해 보는 것만으로도 해결되어지며, 그렇지 않은 문제들은 수식으로 표현할 수 있어야 하므로 문제에 맞게 유연하게 사고할 수 있는 힘 또한 길러야 하겠다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2015수능. A형. 5번	등비수열의 일반항을 이용하여 a_3을 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. A형. 9번	수열의 합과 일반항의 관계를 이용하여 a_4를 구하는 문제(정답형 3점)
2015수능. A형. 5번	등차수열의 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_8을 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. A형. 7번	등비수열의 일반항을 이용하여 a_1을 구하는 문제(정답형 3점)
2016수능. A형. 22번	등차수열의 일반항을 이해하고 공차를 구하는 문제(단답형 3점)
2017수능. 나형. 5번	등비중항의 성질을 이용하여 등비수열의 항을 구하는 문제(정답형 3점)
2017수능. 나형. 15번	등차수열과 절댓값이 포함된 등식으로 a_2를 구하는 문제(정답형 4점)
2017수능. 나형. 25번	자연수의 거듭제곱의 합으로 주어진 합을 구하는 문제(단답형 3점)

14 등차수열과 등비수열

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 49쪽 예제 2번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{2n}=6n+1\ (n\geq 1)$일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11}$의 값은?

① 209 ② 210 ③ 211 ④ 212 ⑤ 213

EBS 문항 분석

가. 등차수열의 짝수 번째 항에 대한 일반항을 이용하여 등차수열의 일반항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 등차수열의 합을 구할 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

등차수열의 뜻과 일반항

가. 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 얻어지는 수열을 등차수열이라 하고, 더하는 일정한 수를 공차라고 한다.

나. 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은 다음과 같다.

$$a_n=a+(n-1)d\ \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

등차수열의 합

가. 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

나. 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 590일 때, a_{20}의 값은?

① 54 ② 56 ③ 58 ④ 60 ⑤ 62

EBS 문항 분석

가. 등차중항에 관한 등식을 항상 만족하는 수열은 등차수열임을 알 수 있어야 한다.
나. 첫째항과 주어진 등차수열의 합을 이용하여 공차를 구하고 a_{20}을 구하는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

등차중항

가. 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

b가 a와 c의 등차중항 $\Leftrightarrow b-a=c-b$

$$\Leftrightarrow 2b=a+c, \text{ 즉 } b=\frac{a+c}{2}$$

등차수열의 합

가. 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

나. 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 51쪽 유제 5번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 4a_2$, $a_1 a_3 = 9$일 때, a_1의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

EBS 문항 분석

가. 두 등식을 모두 만족시키는 등비수열의 초항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
나. 한 등식을 통해 등비수열의 양수인 공비를 구할 수 있어야 하고, 나머지 등식을 통해 a_1을 찾을 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

등비수열의 뜻과 일반항

가. 어떤 수에 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어진 수열을 등비수열이라 하고, 곱한 일정한 수를 공비라고 한다.

나. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n = ar^{n-1}(n = 1, 2, 3, \cdots)$이다.

2017년 수능완성 수학 나형 32쪽 14번

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_{n+2}=S_n+3\times 2^{n+1}$이 성립할 때, a_9의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 등비수열의 합 S_n을 이해하고 주어진 항등식을 이용하여 등비수열의 첫째항 a_1을 구할 수 있어야 한다.

나. 등비수열의 일반항을 알고 주어진 공비와 찾아낸 초항을 통해 a_9를 구할 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

등비수열의 뜻과 일반항

가. 어떤 수에 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어진 수열을 등비수열이라 하고, 곱한 일정한 수를 공비라고 한다.

나. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}(n=1,2,3,\cdots)$이다.

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

가. $r\neq 1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

나. $r=1$일 때, $S_n=na$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 5번

세 수 $\frac{9}{4}$, a, 4가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

EBS 교재 2016년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 51쪽 유제 6번

서로 다른 두 자연수 x, y에 대하여 세 수 x, 4, y가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $x+y$의 최댓값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용

나. 등비중항을 이용하여 항을 구하면 쉽게 해결할 수 있도록 출제됨.

다. 기출문항은 주어진 등비수열의 세 항 중 등비중항을 구하는 문제로 등비중항의 성질만 알면 쉽게 구할 수 있는 매우 기초적인 문제이다. EBS 문항은 등비중항의 성질을 이용하여 두 항의 합의 최댓값을 구하는 문제로 등비중항의 성질을 이용하여 등식을 유도하고 이를 만족하는 자연수를 찾아 그 중에서 최댓값을 구해야 하는 문제이다. 기출문항이 EBS 연계문항보다 난이도가 더 낮다.

문항풀이 Point !!

등비중항에 관한 등식을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 15번

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은? [4점]

(가) $a_6+a_8=0$

(나) $|a_6|=|a_7|+3$

① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

EBS 교재 2016년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 47쪽 예제 1번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{10}=a_1+18,\ a_1+a_4+a_7=0$$

일 때, a_{20}의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 주어진 조건만 약간 변형하여 동일한 유형으로 출제

나. EBS 교재에 있는 문항과 기출문항은 모두 등차수열의 일반항을 이해하고 적용할 수 있는 가를 묻고자 하는 비교적 쉬운 문항이나 기출문항의 경우 절댓값이 두 개나 포함된 등식을 어떻게 이해하느냐에 따라 다소 어렵게 느낄 수 있는 문제라 할 수 있다.

다. EBS 교재에 있는 문항은 첫 번째 등식에서 공비를 구하고, 두 번째 등식에서 초항을 구하여 제20항을 구하는 문항이다. 기출문항은 주어진 두 등식을 통해 초항과 공비에 관한 두 관계식을 연립하여 풀거나 첫 번째 등식에서 등비중항인 제7항을 구하고 이를 활용하여 두 번째 등식에서 제6항을 구하면 또한 비교적 쉽게 일반항을 구할 수 있는 문항이다.

문항풀이 Point !!

등차중항을 이용하여 a_7을 구하고 이를 대입하여 a_6을 구한 후 일반항을 통해 a_2를 구할 수 있다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 26번

첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_6}{a_4}=\frac{1}{4}$$

일 때, $a_5=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

EBS 교재 2017 수능특강 수학II & 미적분I 54쪽 2번

첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2<0,\ \frac{a_4}{a_2}+\frac{a_3}{a_2}=2$$

일 때, a_4의 값은?

① -4 ② -6 ③ -8 ④ -10 ⑤ -12

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용

나. EBS 교재에 있는 문항과 기출문항 모두 주어진 등식을 이용하여 공비를 구하고 이를 통해 구하고자 하는 항을 찾아낼 수 있는 문항으로 풀이방법까지 매우 유사한 같은 유형의 문항이라고 볼 수 있다.

문항풀이 Point !!

등비수열의 정의에 의해 주어진 등식에서 공비에 대한 이차방정식을 유도하고 이를 풀어 공비를 구하면 이를 통해 a_5를 구할 수 있다.

EBS연계 예상문항

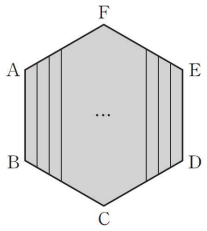
2018수능대비 EBS연계 예상문항1 | 2017 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 47쪽 유제 2번 변형

넓이가 24인 직각삼각형의 세 변의 길이를 크기순으로 나열하면 등차수열을 이룬다. 이 직각삼각형의 세 변의 길이의 합은?

① 24 ② 30 ③ 36 ④ 42 ⑤ 48

풀 이

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정육각형 ABCDEF 가 있다. 대각선 AE 를 $4n$등분한 점을 지나고 대각선 AE 에 수직인 $(4n-1)$개의 직선들이 정육각형과 만나서 생기는 모든 선분의 길이의 합을 a_n이라 하자. $a_n > 200$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?



① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

풀 이

등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 3이고 모든 항이 양수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=120$

(나) $6b_3,\ a_4,\ a_6,\ b_5$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$\frac{a_5}{b_5}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀 이

공비가 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_4=\frac{65}{16},\ a_2+a_3=\frac{5}{4}$$

이다. 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_4-S_2의 값은?

① $\frac{5}{4}$ ② 1 ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{2}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

풀 이

길이가 39인 끈을 잘라 길이가 a, b, c $(a \le b \le c)$인 세 개의 끈으로 만들었다. 세 수 a, b, c는 자연수이고, 이 순서대로 공비가 자연수인 등비수열을 이룰 때, c의 값이 될 수 있는 모든 수의 합은?

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

풀 이

15 수열의 합

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 64쪽 1번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=20$, $\sum_{k=1}^{10}a_kb_k=5$일 때,

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)(b_k+1)$의 값은?

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

EBS 문항 분석

가. 주어진 두 개의 조건으로부터 Σ의 뜻과 성질을 이용해서 구하고자 하는 합을 표현할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 주어진 Σ를 구하고자 하는 Σ에 대입하면 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 합의 기호 Σ의 뜻

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

나. 합의 기호 Σ의 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ (2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (c는 상수) (4) $\sum_{k=1}^{n}c=nc$ (c는 상수)

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

2017년 수능특강 수학II&미적분 I 61쪽 유제 3번

$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2-\sum_{i=1}^{n-1}i(i-1)=55$를 만족시키는 2 이상의 자연수 n의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

EBS 문항 분석

가. 주어진 등식의 첫 번째 Σ를 전개하여 두 번째 Σ와 합할 수 있도록 표현할 수 있다면 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 구하고자 하는 n의 값을 구할 수 있는 문항이다.

나. 주어진 등식의 두 Σ를 모두 전개하여 자연수의 거듭제곱의 합으로 표현하여 계산할 수도 있으나 다소 계산이 복잡해진다.

다시 보는 개념 !!

자연수의 거듭제곱의 합

가. $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

나. $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

다. $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$

함수 $f(x)=|2x+4|$에 대하여 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a_{10})=0$

(나) $\sum_{k=1}^{19} f(a_k)=360$

$\sum_{k=11}^{19} \frac{1}{\sqrt{\frac{a_k}{2}}+\sqrt{\frac{a_{k+1}}{2}}}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 주어진 두 개의 조건으로부터 수열 $\{a_n\}$의 항들의 특징을 파악하여 수열의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 수열 $\{a_n\}$의 제10항을 먼저 구할 수 있고 초항과 공차에 대한 등식을 유도할 수 있다. 두 번째 조건에서 함수의 대칭성과 시그마의 성질을 활용하여 두 번째 초항과 공차에 대한 등식을 유도하여 연립하여 풀면 등차수열의 일반항을 구할 수 있다. 구하는 합을 위해 분모가 서로 다른 두 무리식의 합으로 나타나는 수열의 합을 분모를 유리화하여 구할 수 있어야 하겠다.

다시 보는 개념 !!

일반항이 분수꼴인 수열의 합

가. 일반항이 분수꼴이고, 분모가 서로 다른 두 무리식의 합으로 나타나는 수열의 합은 분모를 유리화하여 구한다.

자연수 n에 대하여 집합 A_n을

$$A_n=\{(x,\ y)|2x+y=2n,\ x,\ y\text{는 음이 아닌 정수}\}$$

라 하고 집합 A_n의 원소의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{11}$ ② $\frac{2}{11}$ ③ $\frac{3}{11}$ ④ $\frac{4}{11}$ ⑤ $\frac{5}{11}$

EBS 문항 분석

가. 주어진 집합의 원소의 개수를 n에 관한 식으로 표현할 수 있어야 하겠다.

나. 일반항이 분수꼴이고, 분모가 서로 다른 두 식의 곱으로 나타나는 수열의 합을 두 개의 분수로 쪼갠 다음 Σ를 전개시킬 수 있으면 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

일반항이 분수꼴인 수열의 합

가. 일반항이 분수꼴이고, 분모가 서로 다른 두 식의 곱으로 나타나는 수열의 합은

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\quad (A\neq B)$$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 25번

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$에 대하여 $\sum_{k=1}^{15} f(2k)$의 값을 구하시오. [3점]

EBS 교재 2016 수능완성 수학 나형 37쪽 38번

이차함수 $f(x)=-x^2+2ax$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{8} f(k+2)=\sum_{k=3}^{10} f(k-1)$$

이 성립할 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 원리 활용

나. EBS 교재에 있는 문항은 주어진 등식에서 시그마의 정의대로 전개하면 a에 관한 간단한 등식을 유도할 수 있고 이를 통해 a의 값과 $f(1)$을 구할 수 있는 문항이다.

다. 기출문항은 주어진 시그마에 함수를 대입하여 자연수의 거듭제곱의 합을 통해 해결할 수 있는 비교적 간단한 유형의 문항이라고 볼 수 있다.

문항풀이 Point !!

시그마에 함수를 대입한 후 자연수의 거듭제곱의 합을 사용하면 비교적 쉽게 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 2

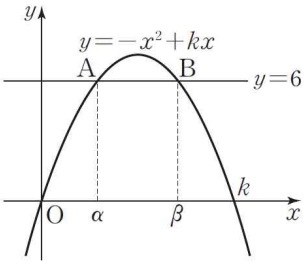
기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 15번

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2-14x+24=0$의 두 근이 a_3, a_8이다. $\sum_{n=3}^{8} a_n$의 값은?

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

EBS 교재 2017 수능완성 수학 나형 33쪽 24번

그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+kx$의 그래프와 직선 $y=6$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, 세 수 $\frac{5}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, $\frac{5}{\beta^2}$가 이 순서대로 등비수열을 이루도록 하는 실수 k의 값을 구하시오. (단, $0<\alpha<\beta<k$)



EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 원리의 활용 및 문항의 변형

나. 기출문항은 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 통해 a_3와 a_8의 합을 구하고 시그마의 정의와 등차수열의 성질을 이용하여 해결할 수 있는 문항이다.

다. EBS 교재에 있는 문항은 기출문항과 마찬가지로 근과 계수와의 관계를 통해 α, β의 합과 곱을 구하고 α, β에 관한 주어진 조건에서 등비중항을 활용하여 k의 값을 구하는 문항이다.

문항풀이 Point !!

근과 계수와의 관계를 통해 두 항의 합을 구할 수 있고 등차수열의 성질을 이용하면 시그마의 합을 비교적 쉽게 구할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 65쪽 2번 변형

자연수 n에 대하여 좌표평면에서 원 $(x-1)^2+(y-4)^2=25$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 중에서 $|x-y|=n$을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

풀 이

자연수 n에 대하여 좌표평면에서 원 $(x-1)^2+(y-4)^2=25$ 위의 점 $P(x, y)$ 중에서 $|x-y|=n$을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

풀 이

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 중심이 점 $(2n,\ 2\sqrt{3}\,n)$이고 반지름의 길이가 n^2인 원 C 위의 점과 원점 사이의 거리의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은?

① 165 ② 175 ③ 185 ④ 195 ⑤ 205

풀 이

첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{S_k S_{k+1}}}$의 값은?

① $\frac{48}{101}$ ② $\frac{50}{101}$ ③ $\frac{52}{101}$ ④ $\frac{54}{101}$ ⑤ $\frac{56}{101}$

풀 이

16 수학적 귀납법

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 69쪽 유제 2번

첫째항이 3인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+1}=a_{2n-1}+4,\ a_{2n+2}=2a_{2n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(나) $2a_7=a_6+a_8$

a_2의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

EBS 문항 분석

가. 수열 $\{a_n\}$의 짝수 번째 항들과 홀수 번째 항들을 귀납적 정의로 나타낸 문항으로 홀수 번째 항은 등차수열, 짝수 번째 항은 등비수열임을 묻는 문항이다.

나. 초항과 공차를 통해 홀수 번째 항들은 모두 알 수 있게 되고, 공비와 두 번째 조건을 통해 짝수 번째 항의 초항인 a_2를 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

가. 첫째항이 a이고, 공차가 d인 등차수열 $\Rightarrow a_1=a,\ a_{n+1}-a_n=d$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

나. 첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열 $\Rightarrow a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = 3 - a_n{}^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{11} a_k$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

EBS 문항 분석

가. 귀납적으로 정의된 여러 가지 수열에 관한 문항으로 주어진 정의에 따라 항들을 차례로 구하여 보면 두 값이 반복되는 수열임을 알 수 있다.

나. 수열의 항들을 구할 수 있게 되면 수열의 합 또한 어렵지 않게 구할 수 있다.

다. 귀납적으로 정의된 수열이 등차수열과 등비수열이 아닌 경우는 주어진 정의에 따라 항들을 차례로 구하여 보면 쉽게 해결되는 경우가 많이 있다.

다시 보는 개념 !!

수열의 귀납적 정의

일반적으로 첫째항의 값과 이웃하는 두 항 사이의 관계식이 정해지면 모든 항의 값이 정해진다. 이와 같이 수열을 정의하는 방법을 수열의 귀납적 정의라 하고, 두 항 사이의 관계식을 점화식이라 한다.

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n+1}<1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)= (가) <1이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\frac{1}{2k+1}<1$$

이므로

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+3}$$
$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k+1}\right)+\left(\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+3}\right)-\boxed{\text{(나)}}$$

이때 $2k+3>2k+2$이므로

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+3}$$
$$<\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k+1}\right)+\left(\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+2}\right)-\boxed{\text{(나)}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(k)$라 할 때, $f(p)$의 값은?

① $\frac{6}{11}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{8}{11}$ ④ $\frac{9}{11}$ ⑤ $\frac{10}{11}$

EBS 문항 분석

가. 수학적 귀납법을 이해하고 빈 칸을 추론하는 문제이다.

나. 주어진 등식이 성립하도록 우변에서 빠져 있는 항을 찾으면 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

수학적 귀납법

자연수 n에 관한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명할 때에는 다음 두 가지를 밝히면 된다.

(1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

이와 같은 증명 방법을 수학적 귀납법이라 한다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 29번

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n\text{이 } 3\text{의 배수인경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

EBS 교재 2016년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 77쪽 대표기출문제

첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + (-1)^n \times 2 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n + 1 & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 43$일 때, a의 값은?

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 원리의 활용 및 문항의 변형

나. 기출문항은 주어진 등차수열을 활용하여 귀납적으로 정의된 수열에 관한 문항이다. 차례대로 항을 적으면 주어진 등차수열의 초항과 공차의 관계식을 유도할 수 있고, 구하고자 하는 수열의 두 항 사이의 비를 등차수열의 항 사이의 비로 바꾸어 해결할 수 있다.

다. EBS 교재에 있는 문항 또한 귀납적으로 정의된 수열의 항들을 차례대로 구하면 a_{15}를 구하고자 하는 a로 나타낼 수 있고 주어진 조건을 통해 해결할 수 있다.

문항풀이 Point !!

귀납적으로 정의된 수열의 항들을 차례대로 적어 보면 규칙성을 발견할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능완성 수학 나형 37쪽 29번 변형

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 15$이고

$$a_{n+1} = 4a_n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{100} a_k = A \times 4^{100} - 5$일 때, A의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

풀 이

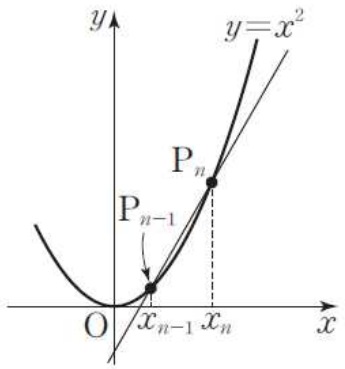
수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오.

㈎ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n + a_{n+1} = 2n+1$

㈏ 5 이하의 어떤 자연수 k에 대하여 $a_{2k-1} - a_{2k} = 2k-1$

풀 이

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}_n(x_n,\ {x_n}^2)$이 있다. 점 P_0은 원점 O이고, 점 P_1은 $(1,\ 1)$이며, 직선 $\mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n+1}$의 기울기를 a_{2n-1}이라 하고, 직선 $\mathrm{P}_{2n-2}\mathrm{P}_{2n}$의 기울기를 a_{2n}이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항 a_1과 공차 d가 모두 자연수이고 $a_1<d$인 등차수열이다.



보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $a_4=x_6$

ㄴ. $x_{4n}+x_{4n+1}+x_{4n+2}+x_{4n+3}+8d=x_{4n+4}+x_{4n+5}+x_{4n+6}+x_{4n+7}$

ㄷ. $x_{16}<50$을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a_1,\ d)$의 개수는 15이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀 이

Ⅷ. 지수와 로그

기출 문항 분석

이 단원의 개념인 지수와 로그는 개념 자체가 쉽지 않은 단원이다. 엄밀함을 따지고 들면 고교 과정의 어떤 단원과 비교해도 쉽지 않다고 할 수 있겠다. 이전 기출문제는 그 난이도에 맞게 실생활에의 적용이나, 거듭제곱근에 관한 여러 문제들, 로그의 지표와 가수에 관한 문제들, 함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족하는 집합의 원소의 개수를 세는 등의 문제들이 변별력 있게 출제되었다.

그러나 지수방정식, 지수부등식, 로그방정식, 로그부등식 뿐만 아니라 지수함수와 로그함수까지도 교육과정에서 제외된 지금은 기본적인 지수로그의 정의나 그 성질을 묻는 문제로 매우 간단한 형식으로 출제되는 경향을 보여주고 있다.

지금은 비록 간단한 개념을 묻는 문제가 대다수이지만 언제라도 그 난이도는 올라갈 수 있으므로 지수의 정의와 지수법칙, 로그의 정의와 성질을 이해하고 활용하는 문제는 필수적으로 정리해 두어야 하며 거듭제곱근의 성질, 지수의 확장, 대소 관계 판별 문제 등을 평상시 많이 연습해야 하겠다. 로그가 정의되기 위한 밑과 진수의 조건과 성질들, 밑의 변환 공식, 그리고 상용로그의 뜻을 알고 이를 활용한 실생활 문제를 많이 다루어 보아야 한다.

출제 경향 포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2015수능. A형. 1번	지수법칙을 이용하여 계산하는 문제(정답형 2점)
2015수능. A형. 10번	로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결하는 문제(정답형 3점)
2015수능. B형. 25번	로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결하는 문제(단답형 3점)
2016수능. A형. 2번	지수법칙을 이용하여 계산하는 문제(정답형 2점)
2017수능. 나형. 1번	지수가 정수인 지수법칙을 이용하여 계산하는 문제(정답형 2점)
2017수능. 나형. 3번	로그의 성질을 이용하여 계산하는 문제(정답형 2점)

17 지수

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 84쪽 1번

-30의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 a, 10의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

거듭제곱근의 뜻을 알고 거듭제곱근 중 실수인 것의 개수를 알고 있는지를 묻는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

거듭제곱근

가. a의 n제곱근

실수 a에 대하여 n(n은 2 이상의 정수)제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$의 근을 a의 n제곱근이라 한다. 이때, a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라 한다.

나. a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 x라 하면

① n이 짝수이면, $a \geq 0$일 때에만 실수 x가 존재하고 $x=\pm\sqrt[n]{a}$이다.

② n이 홀수이면, a의 값에 관계없이 실수 x는 항상 존재하고 $x=\sqrt[n]{a}$이다.

n제곱근	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

$16^2 \times (2^5)^{-2} \div \left(\frac{1}{8}\right)^2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

EBS 문항 분석

정수인 지수를 이해하여 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

지수가 정수인 지수법칙

a, b가 0이 아닌 실수이고, m, n이 정수일 때

가. $a^m a^n = a^{m+n}$

나. $a^m \div a^n = a^{m-n}$

다. $(a^m)^n = a^{mn}$

라. $(ab)^n = a^n b^n$

두 수 $a=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{5}}$, $b=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\frac{1}{4}}$에 대하여 $(ab)^n$이 정수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 30 ② 40 ③ 50 ④ 60 ⑤ 70

EBS 문항 분석

유리수인 지수를 이해하여 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

다시 보는 개념 !!

유리수인 지수

$a>0$이고 m은 정수, n은 2이상의 정수일 때

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

지수가 유리수인 지수법칙

$a>0, b>0$이고 r, s가 유리수일 때

가. $a^r a^s=a^{r+s}$

나. $a^r \div a^s=a^{r-s}$

다. $\left(a^r\right)^s=a^{rs}$

라. $(ab)^r=a^r b^r$

어떤 종이를 한쪽 방향으로만 n회 접을 때, 종이의 두께 t(mm)와 종이의 최소 길이 L(mm) 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L=\frac{\pi t}{6}(2^n+4)(2^n-1)$$

이 종이를 한쪽 방향으로만 3회 접을 때, 종이의 최소 길이는 종이의 두께의 k배이다. k의 값은?

① 6π ② 8π ③ 10π ④ 12π ⑤ 14π

EBS 문항 분석

가. 주어진 실생활 문제가 지수법칙에 대한 문제임을 이해하고 조건들을 주어진 등식에 대입하여 해결하는 문항이다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 1번

8×2^{-2}의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

EBS 교재 2016 수능특강 수학Ⅱ & 미적분Ⅰ 83쪽 유제 5번

$12\times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 사용한 문제

나. 기출문항은 지수가 정수인 지수법칙으로 해결할 수 있는 문항이며, EBS교재에 있는 문항은 지수가 유리수인 지수법칙으로 해결할 수 있는 문항으로 개념이나 원리가 같다고 할 수 있다.

문항풀이 Point !!

지수법칙을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 1번

$3\times 27^{\frac{1}{3}}$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

EBS 교재 2016 수능특강 수학 II & 미적분 I 84쪽 3번

$4^{-\frac{1}{4}}\times 8^{\frac{1}{6}}\div 16^{\frac{1}{8}}$ 의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt[4]{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 사용한 문제

나. EBS교재에 있는 문항과 기출문항 모두 유리수가 지수인 지수법칙을 이용하여 계산하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

지수법칙을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 85쪽 4번 변형

2이상의 자연수 n과 양수 a에 대하여

$$f(n, a)=\sqrt[n+1]{a}$$

이라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(3, 16)=2$

ㄴ. $\{f(7, 3)\}^2\times f(3, 3)\times f(1, 3)=3$

ㄷ. $f(n, f(n, a))=f(n^2+2n, a)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

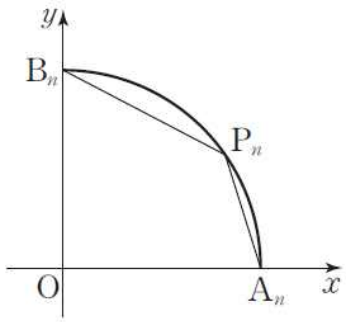
풀 이

두 실수 x, y에 대하여 $\frac{1}{3^x}=\frac{1}{7^y}=441$일 때, $\frac{x+y}{xy}$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

풀 이

그림과 같이 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 원점 O를 중심으로 하고 두 점 $A_n(2^{\frac{3}{n}}, 0)$, $B_n(0, 2^{\frac{3}{n}})$을 지나는 부채꼴 OA_nB_n의 호 A_nB_n 위에 점 P_n이 있다. 사각형 $OA_nP_nB_n$의 넓이의 최댓값을 $f(n)$이라 할 때, $f(3)$의 값은? (단, 점 P_n은 두 점 A_n, B_n이 아니다.)



① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

풀 이

18 로그

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 89쪽 예제 1번

$\log_{x-3}(-x^2+10x-16)$의 값이 정의되도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

EBS 문항 분석

가. 주어진 로그의 밑과 진수 조건을 만족하는 정수 x를 구하는 문항이다.

나. 로그의 밑의 조건을 이용하여 정수 x에 관한 부등식을 얻을 수 있고 로그의 진수 조건을 이용하여 또 하나의 정수 x에 관한 부등식을 얻을 수 있다. 이를 연립하여 풀면 주어진 조건을 만족하는 모든 정수 x를 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

로그의 정의

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$일 때, $a^x=b$를 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재하는데, 이 x를 $\log_a b$로 나타내고, a를 밑으로 하는 b의 로그라고 한다. 이때, a를 밑, b를 진수라고 한다.

$a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$

$5^a=4,\ 5^b=3$일 때, 다음 중 $\log_4 60$을 a, b로 나타낸 것은?

① $\frac{a+b+1}{a}$ ② $\frac{a+b-1}{a}$ ③ $\frac{a-1}{ab}$ ④ $\frac{a+b-1}{ab}$ ⑤ $\frac{a-1}{b}$

EBS 문항 분석

가. 로그의 성질과 밑의 변환 공식을 이용하여 주어진 로그의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 로그의 정의를 이용하여 a, b를 로그로 표현할 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

로그의 정의

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0$일 때, $a^x=b$를 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재하는데, 이 x를 $\log_a b$로 나타내고, a를 밑으로 하는 b의 로그라고 한다. 이때, a를 밑, b를 진수라고 한다.

$a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$

로그의 성질

$a>0,\ a\neq 1,\ c>0,\ c\neq 1,\ m>0,\ n>0$일 때,

가. $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

나. $\log_a mn=\log_a m+\log_a n$

다. $\log_a \frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$

라. $\log_a m^r=r\log_a m$ (r는 임의의 실수)

마. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $b>0$)

바. $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ (단, $b>0,\ b\neq 1$)

자연수 n에 대하여

$$\log 2^n = m+\alpha \ (m\text{은 정수},\ 0 \le \alpha < 1)$$

이라 할 때, $f(n)=m$이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} f(k)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

EBS 문항 분석

가. 상용로그의 정의에 의해 주어진 자연수 n에 대한 상용로그의 정수부분을 이해할 수 있어야 하는 문항이다.

나. 자연수 n의 값에 차례대로 숫자를 대입하여 정수부분을 각각 구하여 문항을 해결할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

상용로그의 뜻

10을 밑으로 하는 로그, 즉 $\log_{10} N\ (N>0)$을 상용로그라 하고, 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$과 같이 나타낸다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 3번

$\log_{15} 3+\log_{15} 5$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 교재 2016 수능특강 수학 II & 미적분 I 89쪽 유제 2번

$\frac{1}{2}\log_3 12-2\log_3 2+\log_3 18$ 의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 사용한 문제

나. EBS 교재에 있는 문항과 기출문항 모두 로그의 성질을 이용하여 계산하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

로그의 기본 성질을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 25번

$\log_3 \frac{9}{2} + \log_3 6$ 의 값을 구하시오.

EBS 교재 2016년 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 89쪽 유제 1번

$\log_2 \sqrt{3} + 3\log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 사용한 문제

나. EBS 교재에 있는 문항과 기출문항 모두 로그의 성질을 이용하여 계산하는 유사한 문항이다.

문항풀이 Point !!

로그의 기본 성질을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 수학Ⅱ&미적분Ⅰ 95쪽 1번 변형

$\log 7.5 = 0.8751$ 일 때 $\log m = -1.1249$ 이다. $\log \frac{m}{15} = a + b\log 5$ 일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.)

풀 이

이차방정식 $x^2-kx+3=0$이 서로 다른 두 실근 $\log_5\alpha$, $\log_5\beta$를 가질 때,

$\log_\alpha\beta-\log_\beta\alpha=\frac{8}{3}$이 성립하도록 하는 자연수 k의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

풀 이

자연수 n에 대하여 6^n의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, …, a_{n^2+2n}, a_{n^2+2n+1}이라 하고, $S(n)=\sum_{k=1}^{n^2+2n+1}\log_6 a_k$라 하자. $S(n)\geq 210$이 성립하도록 하는 n의 최솟값은?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

풀 이

IX. 순열과 조합

기출 문항 분석

이 단원에서는 순열과 조합의 계산문제, 이항정리 문제, 중복조합에 관한 문제가 주로 출제되어 왔다. 그리고 교육과정이 바뀜에 따라 여러 가지 순열(원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열) 문제와 자연수의 분할 문제가 새롭게 보이고 있다.

합의 법칙과 곱의 법칙을 바탕으로 순열과 조합의 단순계산 문제는 기본으로 숙지해야 하며, 최근에는 그간 다루어지지 않았던 여러 가지 순열 문제가 보임에 따라 다양한 문제 유형에 익숙해질 필요가 있다. 조합 관련 문제는 대부분 중복조합의 문제가 거의 매년 빠지지 않고 출제되므로 다양한 중복조합 문제를 풀어봄으로써 대비를 철저히 해야 한다. 자연수의 분할 문제는 간단한 계산 위주로 출제되었으나 앞으로 출제될 것을 대비해 몇 가지 반복되는 문제의 패턴을 평소 숙지할 필요가 있다. 순열과 조합 부분에서는 중복조합을 제외하고는 대부분의 문제들의 난이도가 그렇게 높지 않다. 평소 기본개념을 완벽하게 숙지한 후 기본문형 위주로 자주 풀어보면 어렵지 않게 문제를 해결할 수 있으리라 본다.

출제경향포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2015수능, A형, 7번	이항정리를 이용하여 전개식의 특정 계수를 구하는 문항(정답형 3점)
2015수능, A형, 18번	중복조합을 이용하여 연립방정식의 해의 개수를 구하는 문항(정답형 4점)
2016수능, A형, 17번	중복조합을 이용하여 방정식의 해의 개수를 구하는 문항(정답형 4점)
2017수능, 나형, 22번	순열과 조합을 계산하는 문항 (단답형 3점)
2017수능, 나형, 27번	중복조합을 이용하여 정수해의 개수를 구하는 문항 (단답형 4점)

19 순열

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 확률과 통계 7쪽 유제 3번

7개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중 서로 다른 2개의 자연수로 만들 수 있는 두 자리 자연수의 집합을 A, 6개의 자연수 1, 2, 3, 4, 8, 9 중 서로 다른 2개의 자연수로 만들 수 있는 두 자리 자연수의 집합을 B라 할 때, $n(A \cup B)$의 값은?

① 60 ② 62 ③ 64 ④ 66 ⑤ 68

EBS 문항 분석

가. 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수를 이용한다.

나. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$임을 이용한다.

다. 집합 $A \cap B$의 원소의 개수는 4개의 자연수 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 2개의 수를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다.

다시 보는 개념 !!

가. 서로 다른 n개에서 $r(0 < r \leq n)$개를 택하여 순서대로 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라고 하며, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

나. 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} \quad (\text{단, } 0 < r \leq n) $$

남학생 3명과 여학생 3명이 모두 원형의 탁자에 앉으려고 한다. 여학생 3명이 모두 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

EBS 문항 분석

가. 원순열의 수를 구하는 공식 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$를 이용하는 문제이다.

나. 여학생 3명을 하나로 묶어 1명으로 생각한 후에 내부에서 자리를 바꾸어 앉는 경우도 같이 생각한다.

다시 보는 개념 !!

가. 원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$이다.

0, 1, 2, 3 의 네 개의 수 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는?

① 192 ② 194 ③ 196 ④ 198 ⑤ 200

EBS 문항 분석

가. 중복순열의 수를 구하는 공식 ${}_n\Pi_r = \underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}} = n^r$ 을 이용하는 문제이다.

나. 맨 앞자리에 올 수 있는 수는 0 을 제외한 1, 2, 3 만 가능하다.

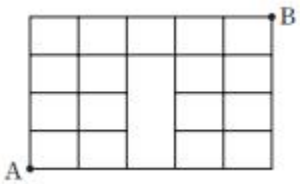
다시 보는 개념 !!

가. 서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 순열을, 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열이라고 하며, 이 중복순열의 수를 기호로 ${}_n\Pi_r$ 와 같이 나타낸다.

나. 중복순열의 수

서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = \underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}} = n^r$ 이다.

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는?

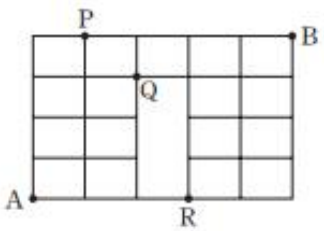


① 52 ② 54 ③ 56 ④ 58 ⑤ 60

EBS 문항 분석

가. 같은 것이 있는 순열의 수를 구하는 공식 $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$(단, $p+q+\cdots+r=n$)을 이용하는 문제이다.

나. 다음 그림과 같이 세 지점 P, Q, R을 거쳐 이동하는 세 가지 경우로 나누어 생각하자.



다시 보는 개념 !!

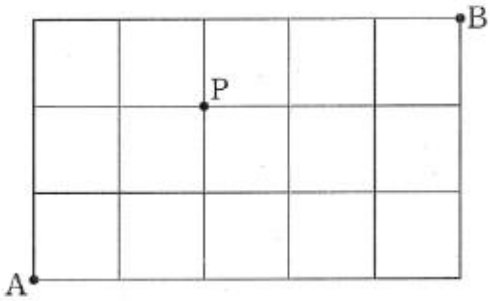
가. 같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개 있을 때, n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는 $\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$(단, $p+q+\cdots+r=n$)

EBS 기출분석 1

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 7번

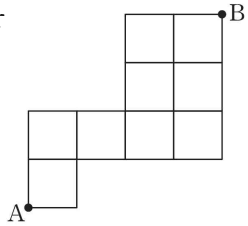
그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

EBS 교재 2017 수능특강 확률과 통계 18쪽 23번

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는?



① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제
나. 기출문항과 EBS교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있으며 두 문항의 전체적인 난이도도 비슷한 수준이다.

문항풀이 Point !!

중간에 거쳐 가는 지점들을 정한 후, 그 지점들을 통과하여 최단거리로 가는 경우를 생각한다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 | 2017 수능특강 확률과 통계 7쪽 유제 4번 변형

0, 1, 2, 3, 4, 5의 여섯 개의 수 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는?

① 94 ② 96 ③ 98 ④ 100 ⑤ 102

풀 이

남자선생님 1명, 여자선생님 2명 그리고 학생 4명이 원형의 탁자에 앉을 때, 2명의 여자선생님은 서로 이웃하고 남자선생님 1명은 여자선생님과 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 140 ② 142 ③ 144 ④ 146 ⑤ 148

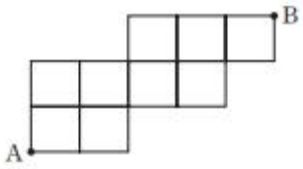
풀 이

서로 다른 종류의 선물 6개를 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 2명 모두에게 적어도 1개씩은 나누어 준다.)

① 54 ② 56 ③ 58 ④ 60 ⑤ 62

풀 이

그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는?



① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

풀 이

20 조합

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 확률과 통계 19쪽 유제 2번

세 학생 A, B, C를 포함한 9명의 학생 중에서 5명을 뽑을 때, A, B, C 중 두 명만 포함하여 5명을 뽑는 경우의 수는?

① 60 ② 62 ③ 64 ④ 66 ⑤ 68

EBS 문항 분석

가. A, B, C 중에서 2명을 뽑고 나머지 6명 중에서 3명을 뽑는다.

다시 보는 개념 !!

가. 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 $r\,(0 \le r \le n)$개를 택하는 것을, n개에서 r개를 택하는 조합이라고 하며, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

나. 서로 다른 n개에서 $r\,(0 \le r \le n)$개를 택하는 조합의 수는

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n) $$

방정식 $x+y+z+2w=8$을 만족시키는 네 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

EBS 문항 분석

가. $x=x'+1, y=y'+1, z=z'+1, w=w'+1(x', y', z', w'$은 음이 아닌 정수)로 놓고, w'의 값에 따라 경우를 나눈 후, 중복조합의 수를 이용하여 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을, 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합이라고 하며, 이 중복조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{H}_r$와 같이 나타낸다.

나. 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능특강 확률과 통계 28쪽 5번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는?

(가) $x+y+z+3w=6$
(나) x, y, z 중 적어도 하나는 0이 아니다.

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

EBS 문항 분석

가. x, y, z 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $x+y+z+3w=6$에서 $w<2$이다.
나. $w=0, 1$인 경우를 나눈 후, 중복조합의 수를 이용하여 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을, 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합이라고 하며, 이 중복조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{H}_r$와 같이 나타낸다.
나. 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이다.

다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

(가) $a+b+c+d=20$
(나) a, b, c는 모두 d의 배수이다.

EBS 문항 분석

가. 중복조합의 수를 이용하여 구하는 문제이다.

나. 조건 (나)에서 $a=a'd, b=b'd, c=c'd\,(a', b', c'$은 자연수$)$라 하면,
조건 (가)에서 $(a'+b'+c'+1)d=20$이므로 d는 20의 2 이상의 약수이다.
이때 $20=2^2\times5$이고, $a'+b'+c'+1\geq4$이므로 d가 될 수 있는 값은 2, 4, 5이다.

다시 보는 개념 !!

가. 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을, 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합이라고 하며, 이 중복조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{H}_r$와 같이 나타낸다.

나. 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$이다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 27번

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.[4점]

(가) $a+b+c=7$
(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 25쪽 예제 4번

방정식 $x+y+z+5w=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는?

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제
나. 기출문항과 EBS 교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있으며 두 문항의 전체적인 난이도도 비슷하다.

문항풀이 Point !!

중복조합의 기본개념을 정확히 숙지한 후에 계수가 가장 큰 수를 중심으로 풀이하는 것이 중요하다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 | 2017 수능특강 확률과 통계 19쪽 유제 1번 변형

옷장에 서로 다른 6개의 티셔츠와 서로 다른 3개의 바지가 있다. 여행을 가기 위해서 이 중에서 티셔츠 3개와 바지 2개를 골라 여행용가방에 담으려고 한다. 여행지에서 상의와 하의를 맞춰서 입을 수 있는 경우의 수를 구하시오.

풀 이

비빔밥을 포함한 서로 다른 5종류의 음식 중에서 비빔밥을 포함하여 7개의 음식을 주문하는 경우의 수는? (단, 주문하지 않는 음식의 종류가 있을 수 있다.)

① 204 ② 206 ③ 208 ④ 210 ⑤ 212

풀 이

$(x+y+z+w)^5$의 전개식에서 문자 w가 포함되지 않은 서로 다른 항의 개수는?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

풀 이

1, 2, 3, 4, 5, 6 이 하나씩 적혀 있는 공이 각각 4 개씩 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 4 개의 공을 동시에 택할 때, 짝수가 적힌 공이 1 개 이상 포함되는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 공은 서로 구별하지 않는다.)

① 107 ② 109 ③ 111 ④ 113 ⑤ 115

풀 이

21 이항정리와 분할

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 확률과 통계 35쪽 예제 2번

같은 종류의 공책 9권을 같은 종류의 가방 4개에 빈 가방이 없도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

EBS 문항 분석

가. 같은 종류의 공책 9권을 같은 종류의 가방 4개에 빈 가방이 없도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는 자연수 9를 4개의 자연수로 분할하는 경우의 수인 $P(9,4)$와 같다.

다시 보는 개념 !!

가. 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 '자연수의 분할'이라고 한다.

나. 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수를 기호로 $P(n,k)$와 같이 나타낸다.

자연수 n을 k개의 자연수의 합으로 나타내는 분할의 수 $P(n,k)$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $P(6,4)=2$

ㄴ. $P(6,3)<P(6,4)$

ㄷ. $P(6,3)=P(3,1)+P(3,2)+P(3,3)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

EBS 문항 분석

가. 보기 'ㄷ'에서 자연수 6을 3개의 자연수로 분할하는 수는 서로 같은 종류의 공 6개를 서로 같은 종류의 주머니 3개에 빈 주머니가 없도록 넣는 경우의 수와 같다.

다시 보는 개념 !!

가. 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타내는 것을 '자연수의 분할'이라고 한다.

나. 자연수 n을 k개의 자연수로 분할하는 방법의 수를 기호로 $P(n,k)$와 같이 나타낸다.

$\left(ax+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 80 일 때, 양수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 이항정리를 이용하여 $\left(ax+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식의 일반항 ${}_5\mathrm{C}_r(ax)^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$ 을 구하여 정리한다.

다시 보는 개념 !!

가. 이항정리

n 이 자연수일 때 $(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

$\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ 의 전개식에서 상수항이 존재하도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 a 라 하고 그때의 상수항을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

EBS 문항 분석

가. 이항정리를 이용하여 $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ 의 전개식의 일반항

$$ {}_n\mathrm{C}_r (2x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_n\mathrm{C}_r\, 2^{n-r}\, x^{2n-3r} $$

을 구하여 정리한다.

나. 상수항이 존재하려면 $2n-3r=0$ 이다.

다시 보는 개념 !!

가. 이항정리

n 이 자연수일 때 $(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$

$$ = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r $$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 8번

자연수 8을 4개의 자연수로 분할하는 방법의 수는? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

EBS 교재 2017 수능특강 확률과 통계(이항정리와 분할) 예제 4번

같은 종류의 공 8개를 같은 종류의 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 넣는 경우의 수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 개념과 원리를 문제를 축소 변형하여 출제

나. 기출문항과 EBS 교재의 문항은 동일한 개념인 자연수의 분할을 묻고 있으나 실생활 소재를 가지고 만든 연계문항이 기출문항보다 다소 어렵다.

문항풀이 Point !!

자연수의 분할 문제는 기준이 되는 한 자리를 정하여 대입 가능한 최대숫자(혹은 최소숫자)부터 차례로 하나씩 낮은(높은) 경우를 생각하여 풀면 문제를 해결하기가 쉽다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 19번

다음은 x에 대한 다항식 $(x+a^2)^n$과 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같게 되는 두 자연수 a와 $n(n \geq 4)$의 값을 구하는 과정의 일부이다.

> $(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 a^2n이다.
> $(x^2-2a)(x+a)^n = x^2(x+a)^n - 2a(x+a)^n$에서
> $x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{\text{(가)}} \times a^3$이고,
> $2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $2a^2n$이다.
> 따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는
> $$\boxed{\text{(가)}} \times a^3 - 2a^2n$$
> 이다. 그러므로
> $$a^2n = \boxed{\text{(가)}} \times a^3 - 2a^2n$$
> 이고, 이 식을 정리하여 a를 n에 관한 식으로 나타내면
> $$a = \frac{18}{\boxed{\text{(나)}}}$$
> 이다. 여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로
> $$n = \boxed{\text{(다)}}$$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(k)+g(k)$의 값은? [4점]

① 10 ② 16 ③ 22 ④ 28 ⑤ 34

$\left(ax^2-\frac{1}{2x}\right)^7$의 전개식에서 x^2의 계수가 140일 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS 교재의 문항은 동일한 개념인 이항정리의 개념을 묻고 있으나 기출문항에서는 서술형의 풀이과정을 제시하고 빈 칸을 채워 넣는 형태의 다소 생소한 형태로 출제되었다.

문항풀이 Point !!

이항정리의 개념을 잘 이해한 후에 계산상의 실수를 방지하기 위해 계수와 차수에 유의하여 풀이하도록 한다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 확률과 통계 33쪽 유제 1번 변형

서로 다른 지우개 6 개를 서로 같은 필통 3 개에 빈 필통이 없도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는?

① 88 ② 90 ③ 92 ④ 94 ⑤ 96

풀 이

$S(17,1)+S(17,2)$의 값을 구하시오.

풀 이

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$ 의 전개식에서 상수항은?

① 76 ② 78 ③ 80 ④ 82 ⑤ 84

풀 이

n이 5 이하의 자연수일 때, 서로 다른 연필 10자루에서 $2n$자루의 연필을 택하는 경우의 수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{k=1}^{5} f(k)$의 값은? (단, 연필을 택하는 순서는 고려하지 않는다.)

① 509 ② 511 ③ 513 ④ 515 ⑤ 517

풀 이

X. 확률

기출 문항 분석

확률 단원에서는 그동안 조건부확률을 이용하여 확률을 구하는 문제가 주로 출제되었으며, 문제 풀이과정 속에는 단순한 조건부확률 계산을 비롯하여 덧셈정리, 곱셈정리, 배반사건, 여사건정리, 독립사건 등의 내용이 포함되어 있는 문제가 많았다.

확률 단원에서는 확률에 관한 여러 가지 개념과 원리를 잘 이해하고 다양한 문제를 많이 풀어보는 연습이 필요하다. 특히, 최근에 보이고 있는 순열과 조합을 이용한 확률 계산 문제와 독립시행의 문제에도 관심을 가지고 있어야 한다. 확률 부분은 순열과 조합 부분과 더불어 출제빈도가 매우 높은 부분이므로 기본 개념 숙지 후에는 기본문제와 관련 기출문제를 충분히 풀어서 다양한 문제출제에 대비를 철저히 하도록 해야 한다.

출제경향포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2015수능, A형, 16번	주어진 확률을 이용하여 조건부확률을 구하는 문항(정답형 4점)
2016수능, A형, 6번	조건부확률을 이용하여 주어진 값을 구하는 문항(정답형 3점)
2016수능, A형, 26번	주어진 상황에서 조건부확률을 구하는 문항(단답형 4점)
2017수능, 나형, 4번	확률의 성질을 이용하여 값을 구하는 문항 (정답형 3점)
2017수능, 나형, 11번	독립시행의 확률을 계산하는 문항 (정답형 3점)
2017수능, 나형, 13번	조건부확률을 이용하여 값을 구하는 문항 (정답형 3점)

22 확률

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 확률과 통계 49쪽 예제 3번

1학년 남학생 2명, 1학년 여학생 2명, 2학년 남학생 3명, 2학년 여학생 1명이 있다. 이 8명의 학생을 임의로 일렬로 세울 때, 양쪽 끝에 모두 남학생이 서거나 모두 2학년 학생이 설 확률은?

① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{11}{28}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{13}{28}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

EBS 문항 분석

가. 두 사건 A, B에 대하여 두 사건 A 또는 B가 일어날 확률은 확률의 덧셈정리 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$를 이용한다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률의 덧셈정리

표본공간 S의 임의의 두 사건 A, B에 대하여

① $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

2017년 수능특강 확률과 통계 49쪽 유제 6번

서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 세 눈의 수의 곱이 소수이거나 홀수일 확률은?

① $\frac{5}{36}$ ② $\frac{11}{72}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{13}{72}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

EBS 문항 분석

가. 두 사건 A, B에 대하여 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ 임을 이용한다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률의 덧셈정리

표본공간 S의 임의의 두 사건 A, B에 대하여

① $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능특강 확률과 통계 51쪽 유제 7번

남학생 4명과 여학생 4명 중에서 임의로 3명을 동시에 뽑을 때, 적어도 1명의 여학생이 포함될 확률은?

① $\frac{9}{14}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{11}{14}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{13}{14}$

EBS 문항 분석

가. 적어도 1명의 여학생이 포함되게 뽑는 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 남학생만 3명을 뽑는 사건이다.

다시 보는 개념 !!

가. 표본공간 S의 한 사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하며, 기호 A^C로 나타낸다.

나. 사건 A의 여사건 A^C의 확률은 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

2018수능대비 EBS 대표 예제 4

2017년 수능특강 확률과 통계 51쪽 유제 8번

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 짝수이거나 소수일 확률은?

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{31}{36}$ ③ $\frac{8}{9}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

EBS 문항 분석

가. 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 짝수인 사건을 A, 소수인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A \cup B)$이다.

나. $\mathrm{P}(A \cup B) = 1 - \mathrm{P}((A \cup B)^c)$

다시 보는 개념 !!

가. 표본공간 S의 한 사건 A에 대하여 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하며, 기호 A^C로 나타낸다.

나. 사건 A의 여사건 A^C의 확률은 $\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 4번

두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{3}{16}$일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

(단, B^C은 B의 여사건이다.)

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{7}{32}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{9}{32}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

EBS 교재 2016 수능완성 수학 나형 164쪽 9번

주머니 안에 1, 2, 3, 4 의 숫자가 하나씩 적혀 있는 4 장의 카드가 있다. 주머니에서 갑이 2 장의 카드를 임의로 뽑고 을이 남은 2 장의 카드 중에서 1 장의 카드를 임의로 뽑을 때, 갑이 뽑은 2 장의 카드에 적힌 수의 곱이 을이 뽑은 카드에 적힌 수보다 작을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS 교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있으나 연계문항이 조합을 이용하는 내용이 포함되어 기출문항보다 다소 어렵다.

문항풀이 Point !!

순열과 조합의 기본개념을 충분히 익히고, 배반사건의 유무를 파악한 뒤에 그에 맞는 확률의 덧셈정리를 사용하는 게 중요하다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 확률과 통계 49쪽 유제 5번 변형

1부터 30까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 30장의 카드가 있다. 이 중에서 임의로 1장의 카드를 택할 때, 이 카드에 적혀 있는 수가 4의 배수이거나 5의 배수일 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

풀 이

주머니 안에 0, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수의 합이 4 이상 8 이하일 확률은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{4}{7}$

풀 이

노란 공 4개, 빨간 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 노란 공 2개, 빨간 공 2개가 나올 확률은?

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{12}{21}$ ③ $\frac{14}{21}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{18}{21}$

풀 이

서로 배반사건인 두 사건 A와 B가 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$을 만족시킬 때, $\mathrm{P}(A^C)$의 값은? (단, A^C은 사건 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

풀 이

23 조건부확률

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 확률과 통계 57쪽 유제 1번

어느 고등학교 1학년 학생 100 명을 대상으로 인문학특강과 자연과학특강 중 하나의 특강에 참여하는 신청을 받았더니 그 결과가 오른쪽 표와 같았다. 이 100 명의 학생 중 임의로 선택한 한 학생이 자연과학특강을 신청한 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은?

	남학생	여학생	계
인문학특강	25	30	55
자연과학특강	35	10	45
계	60	40	100

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

EBS 문항 분석

가. 100 명의 학생 중 임의로 선택한 한 학생이 자연과학특강을 신청한 학생일 사건을 A, 여학생일 사건을 B 라 하고 조건부확률을 이용한다.

다시 보는 개념 !!

가. 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라고 하며, 이것을 기호로 $P(A|B)$와 같이 나타낸다.

나. 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ (단, $\mathrm{P}(B)\neq 0$)

다. 두 사건 A, B에 대하여

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$ (단, $P(A)\neq 0,\ P(B)\neq 0$)

어느 회사의 직원은 모두 60명이고, 각 직원은 두 개의 부서 A, B 중 한 부서에 속해 있다. 이 회사의 A부서는 20명, B부서는 40명의 직원으로 구성되어 있다. 이 회사의 A부서에 속해 있는 직원의 50%가 여성이다. 이 회사 여성 직원의 60%가 B부서에 속해 있다. 이 회사의 직원 60명 중에서 임의로 선택한 한 명이 B부서에 속해 있을 때, 이 직원이 여성일 확률은 p이다. $80p$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나. 이 회사의 여성 직원의 수를 n명, B부서에 속해 있는 여성 직원의 수는 $0.6n$명이라 두고, 먼저 여성 직원의 수를 구한 다음 확률을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라고 하며, 이것을 기호로 $P(A|B)$와 같이 나타낸다.

나. 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ (단,$\mathrm{P}(B)\neq 0$)

다. 두 사건 A, B에 대하여

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$ (단,$P(A)\neq 0,\ P(B)\neq 0$)

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능특강 확률과 통계 63쪽 예제 4번

주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 4, 5, 6, 7, 8의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 두 공에 적혀 있는 수의 곱이 짝수일 확률은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{16}{25}$ ③ $\frac{17}{25}$ ④ $\frac{18}{25}$ ⑤ $\frac{19}{25}$

EBS 문항 분석

가. 서로 독립인 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ $(\mathrm{P}(A)\neq 0, \mathrm{P}(B)\neq 0)$이다.

다시 보는 개념 !!

가. 두 사건 A, B에 대하여 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 아무런 영향을 주지 않을 때, 즉 $P(B|A)=P(B)$ 또는 $P(A|B)=P(A)$일 때, 두 사건 A, B는 서로 독립이라고 한다.

나. 두 사건이 서로 독립이 아닐 때, 두 사건은 서로 종속이라고 한다.

다. 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)(\mathrm{P}(A)\neq 0, \mathrm{P}(B)\neq 0)$

2017년 수능특강 확률과 통계 65쪽 유제 8번

A, B 두 사람이 게임을 하는데 한 번의 게임에서 A가 B를 이길 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다. 3번의 게임을 먼저 이기는 사람이 상금을 모두 갖기로 할 때, A가 다섯 번째 게임을 한 후 상금을 모두 가져갈 확률은? (단, A와 B가 비기는 경우는 없다.)

① $\frac{8}{81}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{10}{81}$ ④ $\frac{11}{81}$ ⑤ $\frac{4}{27}$

EBS 문항 분석

가. 독립시행을 이용하여 문제를 해결한다.

나. A가 5번째 게임을 한 후 상금을 모두 가져가려면 5번째 게임에서 3번째로 이기면 되므로 앞의 4번의 게임에서 2번을 이기고 2번은 지면 된다.

다시 보는 개념 !!

가. 동전 또는 주사위를 여러 번 던지는 경우와 같이 동일한 조건에서 어떤 시행을 되풀이할 때, 각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 영향을 주지 않는 경우, 즉 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립이면 이런 시행을 '독립시행'이라고 한다.

나. 매회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은 ${}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$ 이다.

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 11번

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 4의 눈이 한 번만 나올 확률은?

① $\frac{25}{72}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{29}{72}$

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 50쪽 19번

한 개의 동전을 8번 던질 때, 앞면이 n번 나올 확률이 $\frac{7}{32}$이다. 모든 자연수 n의 값의 곱을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS 교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있으며 독립시행의 기본개념만으로 충분히 해결가능한 문제이다.

문항풀이 Point !!

독립시행의 기본개념을 정확히 숙지한 후에 계산상의 실수 없이 풀이하는 것이 중요하다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 13번

어느 학교의 전체 학생은 360명이고, 각 학생은 체험 학습 A, 체험 학습 B 중 하나를 선택하였다. 이 학교의 학생 중 체험 학습 A를 선택한 학생은 남학생 90명과 여학생 70명이다. 이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명의 학생이 체험 학습 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은 $\frac{2}{5}$ 이다. 이 학교의 여학생의 수는?

① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 67쪽 2번

어느 고등학교 동아리 회원 10명을 대상으로 졸업한 중학교를 조사한 결과 오른쪽 표와 같았다. 이들 10명 중 임의로 선택한 세 명이 모두 같은 중학교를 졸업한 회원이었을 때, 이 세 명의 학생이 모두 A 중학교를 졸업한 회원일 확률은?

중학교	A	B	합계
인원수(명)	6	4	10

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문항과 EBS 교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있으나 기출문항이 연계문항보다 다소 어렵다.

문항풀이 Point !!

조건부확률의 개념을 정확히 이해하고 주어진 조건을 가급적이면 도식화시켜 풀이하는 것이 가장 중요하다.

EBS 기출분석 3

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 5번

두 사건 A와 B는 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{9}$일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 66쪽 3번

서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\frac{13}{16}$일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 사건 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 개념과 원리를 문제를 축소 변형하여 출제

나. 기출문항과 EBS 교재의 문항은 동일한 개념인 독립사건에 대해 묻고 있으나 기출문항이 연계문항보다 다소 쉽게 출제되었다.

문항풀이 Point !!

두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)(\mathrm{P}(A)\neq 0, \mathrm{P}(B)\neq 0)$을 활용하여 문제를 해결한다.

EBS 기출분석 4

기출 문항 2018학년도 대수능 6월 모의평가 수학 나형 28번

흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 m, n이라 하자. 이 시행에서 $2m \geq n$일 때, 꺼낸 흰 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 57쪽 예제 1번

주머니 A 안에 흰 공 2개, 검은 공 1개가 들어 있고, 주머니 B 안에 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A, B에서 공을 각각 1개씩 임의로 뽑았더니 색이 서로 다른 공이 나왔을 때, 주머니 A에서 흰 공을 뽑았을 확률은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 개념과 원리를 문제를 축소 변형하여 출제
나. 기출문항과 EBS 교재의 문항은 동일한 개념인 조건부확률을 묻고 있으나, 개념의 특성상 문항을 표현하는 방법이 달라 주의를 요한다.

문항풀이 Point !!

조건부확률의 관계식 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$(단,$P(A)\neq 0$)를 문제에 맞게 적절히 활용한다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 확률과 통계 59쪽 유제 2번 변형

흰 공 4개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내고, 뒷면이 나오면 검은 공 1개를 주머니에 넣은 후 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낸다. 꺼낸 공이 흰 공일 확률은?

① $\frac{13}{28}$ ② $\frac{15}{28}$ ③ $\frac{17}{28}$ ④ $\frac{19}{28}$ ⑤ $\frac{21}{28}$

풀 이

흰 공 3개, 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 갑이 임의로 1개의 공을 꺼내고 남은 7개의 공 중에서 을이 임의로 1개의 공을 꺼냈다. 을이 꺼낸 공이 검은 공일 때, 갑이 꺼낸 공이 흰 공일 확률은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

풀 이

5 개의 동전을 동시에 던지는 시행을 2 번 했을 때, 모두 같은 면이 나온 횟수가 1 일 확률은?

① $\frac{15}{128}$ ② $\frac{17}{128}$ ③ $\frac{19}{128}$ ④ $\frac{21}{128}$ ⑤ $\frac{23}{128}$

풀 이

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 서로 같으면 한 개의 동전을 6번 던지고, 나온 눈의 수가 서로 다르면 한 개의 동전을 4번 던지기로 하였다. 이 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은?

① $\frac{31}{96}$ ② $\frac{33}{96}$ ③ $\frac{35}{96}$ ④ $\frac{37}{96}$ ⑤ $\frac{39}{96}$

풀 이

XI. 통계

기출 문항 분석

이 단원에서는 매년 3문항이 출제되었으나, 2017학년도 수능에서는 가형에서 정답형 2문항이 출제되었으며 나형에서는 정답형 1문항과 단답형 1문항(총 2문항)이 출제되었고 1문항은 공통문항으로 가형에서 정답형, 나형에서는 단답형으로 출제되었다. 이 단원은 같은 수학적 내용을 반복적으로 출제하므로 유형이 정형화되어 비교적 쉽게 해결할 수 있다. 출제 내용을 살펴보면, 이산확률분포에서는 이산확률변수와 확률질량함수를 이해하고, 확률분포표를 이용한 평균, 분산, 표준편차 등을 구하거나, $aX+b$ 꼴의 확률변수의 평균, 분산, 표준편차 등을 구하는 문제, 표본평균의 평균, 분산, 표준편차를 구하는 문제가 출제된다. 또한 이항분포를 따르는 확률변수의 평균과 분산을 구하는 문제도 출제되었다. 연속확률분포에서는 연속확률변수와 확률밀도함수를 이해하고, 적분을 이용하여 평균, 분산, 표준편차를 구하거나, 정규분포를 따르는 확률변수의 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구하는 문제가 출제되었다.

출제경향포인트

출제 연도	기출 문항의 형태
2015수능, A형, 12번	표준정규분포를 이용하여 표본평균을 구하는 문항 (정답형 3점)
2015수능, A형, 25번	이항분포의 평균과 분산을 구하는 문항 (단답형 3점)
2015수능, A형, 27번	확률밀도함수에서의 확률을 구하는 문항 (단답형 4점)
2016수능, A형, 9번	표본평균의 표준편차를 구하는 문항 (정답형 3점)
2016수능, A형, 12번	표준정규분포를 이용하여 표본평균을 구하는 문항 (단답형 3점)
2016수능, A형, 25번	이산확률변수의 평균을 구하는 문항 (단답형 3점)
2017수능. 가형. 13번	표본평균의 확률을 비교하는 문항 (정답형 3점)
2017수능. 가형. 18번	정규분포를 활용하여 확률을 구하는 문항 (정답형 4점) (나형공통)
2017수능. 나형. 16번	표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 문항 (정답형 4점)

24 이산확률분포

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 확률과 통계 80쪽 2번

확률변수 X의 확률분포가 표와 같다. $\mathrm{E}(X^2)=1$일 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

X	-1	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	b	1

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

EBS 문항 분석

가. 이산확률변수의 평균을 구하는 문제이다.
나. 확률질량함수의 성질을 이용하여 a와 b의 값을 구하고, 확률변수 X의 평균을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1,2,3,\cdots,n)$일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

1) $0\le \mathrm{P}(X=x_i)=p_i\le 1$ 2) $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i=1$

3) $\mathrm{P}(x_i\le X\le x_j)=\sum_{k=i}^{j}\mathrm{P}(X=x_k)=\sum_{k=i}^{j}p_i$ (단, $i,j=1,2,3,\cdots,n$이고 $i\le j$)

나. 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1,2,3,\cdots,n)$일 때,

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=m$$

을 이산확률변수 X의 기댓값 또는 평균이라 하고 $\mathrm{E}(X)$와 같이 나타낸다.

$\sum_{k=0}^{90}(k^2+3)\cdot {}_{90}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{90-k}$ 의 값은?

① 883 ② 893 ③ 903 ④ 913 ⑤ 923

EBS 문항 분석

가. 이항분포의 평균과 분산을 이용하여 해결하는 문제이다.

나. 주어진 확률질량함수를 통해 확률변수 X가 이항분포임을 이해하고, 이항분포의 평균과 분산을 구하는 식을 이용하여 해결한다.

다시 보는 개념 !!

가. 이항분포

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\,p^x q^{n-x} \quad (\text{단, } x=0, 1, 2, \cdots, n,\ q=1-p)$$

이다. 이와 같은 확률변수 X의 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n, p)$와 같이 나타낸다.

나. 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때

1) 평균 : $\mathrm{E}(X)=np$
2) 분산 : $\mathrm{V}(X)=npq$ (단, $q=1-p$)
3) 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{npq}$ (단, $q=1-p$)

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능특강 확률과 통계 81쪽 3번

자연수 n에 대하여 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=cx \quad (x=1, 2, 3, \cdots, n)$$

이다. $\mathrm{V}(X)=1$을 만족시키는 자연수 n의 값은? (단, c는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

EBS 문항 분석

가. 이산확률변수와 확률질량함수를 이해하여 문제를 해결해야 한다.

나. 확률의 합이 1임을 이용하여 상수 c를 구하고 분산의 정의를 이용하면 자연수 n의 값을 구할 수 있다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률질량함수의 성질

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때, 확률의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

1) $0 \le \mathrm{P}(X=x_i)=p_i \le 1$

2) $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

3) $\mathrm{P}(x_i \le X \le x_j)=\sum_{k=i}^{j} \mathrm{P}(X=x_k)=\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, $i, j=1, 2, 3, \cdots, n$이고 $i \le j$)

나. 확률변수 X와 두 상수 a, b $(a \neq 0)$에 대하여 확률변수 $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$ 2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

3) $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 $2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9, 2^{10}$이고 확률변수 X의 확률질량함수가 다음과 같다.

$$\begin{cases} \mathrm{P}(X=2^k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k & (\text{단, } k=1, 2, 3, \cdots, 9) \\ \mathrm{P}(X=2^{10})=a \end{cases}$$

$\mathrm{E}(X^2)=b\times 2^{11}-2$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오.

EBS 문항 분석

가. 이산확률변수에서 X^2의 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
나. 주어진 확률변수 X와 X의 확률질량함수를 이용하여 X의 확률분포표를 작성하면 보다 정확하게 해결가능하다.

다시 보는 개념 !!

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i (i=1, 2, 3, \cdots, n)$일 때,

가. 평균 : $\mathrm{E}(X)=m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

나. 분산 : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-m)^2)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

다. 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 확률과 통계 82쪽 2번 변형

동전 한 개를 던져서 앞면이 나오면 1 점, 뒷면이 나오면 2 점을 얻는 게임이 있다. 철수가 이 게임을 연속으로 두 번 하여 얻은 점수의 합을 a 라 하자. 확률변수 X 를 $X=|3-a|$ 라 할 때, 확률변수 $2X+3$ 의 기댓값 $\mathrm{E}(2X+3)$ 의 값을 구하시오.

풀 이

한 개의 주사위를 4번 던졌을 때, 짝수의 눈이 나온 횟수와 홀수의 눈이 나온 횟수의 차를 확률변수 X라 하자. 확률변수 $2X+5$의 평균 $\mathrm{E}(2X+5)$의 값을 구하시오.

풀 이

수직선의 원점 위에 점 P가 놓여 있다. 점 P는 주사위를 한 개 던져 짝수의 눈이 나오면 양의 방향으로 나온 눈의 수만큼, 홀수의 눈이 나오면 음의 방향으로 4만큼 움직인다. 주사위를 한 번 던진 후 점 P가 도달한 좌표를 확률변수 X라 하자. 이때, $\mathrm{V}(3X)$의 값을 구하시오.

풀 이

다음과 같이 당첨되면 상금을 받는 두 종류의 게임이 있다.

[게임1] : 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 합이 10보다 크면 당첨이다.
[게임2] : 5개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 4개 이상 나오면 당첨이다.

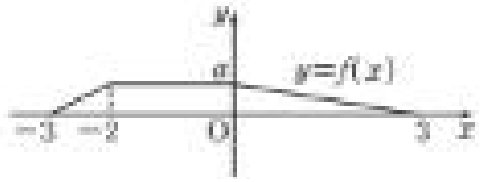
[게임1]을 20번 시행했을 때 당첨되는 횟수를 X, [게임2]를 n번 시행했을 때 당첨되는 회수를 Y라고 하자. 확률변수 Y의 표준편차가 확률변수 X의 표준편차보다 크게 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

풀 이

25 정규분포

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 확률과 통계 85쪽 유제 1번

연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $-3 \le X \le 3$이고, 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\mathrm{P}(|X| \le 2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

EBS 문항 분석

가. 확률밀도함수를 성질을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다.

나. 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률을 구한다.

다시 보는 개념 !!

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $a \le X \le b$이고, 이 범위에서 함수 $f(x)$가 다음과 같은 세 가지 성질을 가질 때, 함수 $f(x)$를 확률밀도함수라고 한다. 이때 확률변수 X는 확률밀도함수가 $f(x)$인 확률분포를 따른다고 한다.

가. $f(x) \ge 0$

나. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

다. $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha, x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $a \le \alpha \le \beta \le b$)

2018수능대비 EBS 대표 예제 2

2017년 수능특강 확률과 통계 87쪽 3번

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(a-2 \le X \le a+4)$의 값이 최대가 되도록 하는 실수 a에 대하여 표를 이용하여 구한 $\mathrm{P}(X \ge a+4)$의 값은 0.0668이다. 양수 σ의 값은?

x	$\mathrm{P}(m \le X \le x)$
$m+1.5\sigma$	0.4332
$m+2\sigma$	0.4772
$m+2.5\sigma$	0.4938

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

EBS 문항 분석

가. 정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

나. 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용하여 양수 σ의 값을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 정규분포곡선의 성질

1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 종 모양의 곡선이다.
2) 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
3) x축을 점근선으로 한다.
4) $x=m$일 때, 최댓값을 갖는다.

나. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 다음이 성립한다.

1) $\mathrm{P}(X \ge m) = \mathrm{P}(X \le m) = 0.5$
2) $\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m) = \mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$
3) $\mathrm{P}(m-\sigma \le X \le m+\sigma) = 2 \times \mathrm{P}(m \le X \le m+\sigma)$

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능특강 확률과 통계 92쪽 4번

어느 공장에서 생산하는 A연필의 길이는 평균이 175 mm이고, 표준편차가 4 mm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 A연필 중에서 임의로 택한 A연필 한 개의 길이가 171 mm 이상이고 181 mm 이하일 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.6826 ② 0.7745 ③ 0.8664 ④ 0.9104 ⑤ 0.9710

EBS 문항 분석

가. 정규분포를 따르는 확률변수의 특정구간에서의 확률을 구하는 문제이다.

나. 정규분포를 새로운 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$를 이용하여 표준정규분포 $N(0,\ 1^2)$의 변수 범위로 바꾼다.

다. 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 새로운 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$의 확률분포는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

나. $\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \le Z \le \frac{b-m}{\sigma}\right)$

확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=r)={}_{48}\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{48-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 48)$이다. $\mathrm{V}(-3X+2)=81$일 때, $\mathrm{P}(X\geq 15)$의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $0<p<\frac{1}{2}$)

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0013 ② 0.0062 ③ 0.0228 ④ 0.0668 ⑤ 0.1587

EBS 문항 분석

가. 독립시행의 횟수가 충분히 큰 경우 정규분포를 따르므로 이항분포에서의 평균과 표준편차를 구하여 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 확인한다.

나. 정규분포를 새로운 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$를 이용하여 표준정규분포 $N(0,\ 1^2)$의 변수 범위로 바꾼다.

다. 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

다시 보는 개념 !!

가. 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p인 시행을 n회 반복 시행할 때, 사건 A가 일어날 횟수를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음과 같은 독립시행의 확률을 따른다. 이와 같은 확률분포를 이항분포라 하고, $\mathrm{B}(n,\ p)$로 나타낸다.

$$\mathrm{P}(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r} \quad (\text{단, } q=1-p,\ r=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n)$$

나. 평균, 분산, 표준편차의 성질

1) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$ ($a,\ b$는 상수)

2) $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

3) $\sigma(aX+b)=|a|\,\sigma(X)$

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 가형 18번

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

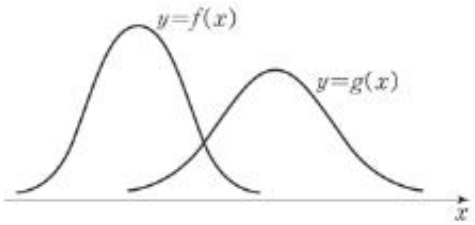
z	$P(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

m이 자연수일 때, $P(17 \le X \le 18)$의 값을 정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062 ④ 0.078 ⑤ 0.097

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 87쪽 유제 4번

두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$, $\mathrm{N}(10, 4^2)$을 따른다. X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. m과 σ가 모두 자연수일 때, 모든 순서쌍 (m, σ)의 개수를 구하시오.



EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제
나. 기출문항과 EBS 교재의 문항은 동일한 개념을 묻고 있으나 기출문항이 연계문항보다 다소 어렵다.

문항풀이 Point !!

확률변수의 평균의 개념을 정확히 이해하여 조건을 이용하여 평균을 구하는 것이 가장 중요하다.

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 | 2017 수능특강 확률과 통계 93쪽 3번 변형

어느 도시의 주민을 대상으로 어느 축구 경기의 시청률을 조사하였더니 60 % 이었다고 한다. 이 도시의 주민 중 임의로 150 명을 택할 때, 이 축구 경기를 시청한 사람이 99 명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.8	0.2881
1.0	0.3413
1.2	0.3849
1.5	0.4332

① 0.3849 ② 0.5762 ③ 0.8413 ④ 0.8849 ⑤ 0.9332

풀 이

확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x)={}_{72}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{72-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 72)$에 대하여 $\mathrm{P}(20\le X\le 30)$의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구하면?

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

① 0.38 ② 0.53 ③ 0.62 ④ 0.77 ⑤ 0.91

풀 이

닫힌 구간 $[1,\ 5]$의 모든 값을 갖는 확률변수 X와 확률밀도함수 $f(x)$가

$\mathrm{P}(2 \le X \le 3) = \frac{1}{5}$, $f(3+x) = f(3-x)$ 를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(1 \le X \le 4)$의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

풀 이

세 개 중 한 개의 꼴로 스트라이크를 던지는 어느 야구 선수가 한 시즌에 던진 1458개의 공중에서 스트라이크의 개수를 X라 할 때, $\mathrm{P}(X \geq k) = 0.1587$을 만족하는 실수 k의 값을 구하시오. (단, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$)

풀 이

수직선의 원점 위에 말이 놓여있다. 주사위를 한 번 던져서 짝수의 눈이 나오면 양의 방향으로 2 만큼, 홀수의 눈이 나오면 음의 방향으로 1 만큼 말을 움직이는 게임을 하려고 한다. 주사위를 100 번 던졌을 때, 말의 위치가 80 이상일 확률을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}\,(0 \le Z \le z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

풀 이

26 통계적 추정

2018수능대비 EBS 대표 예제 1 2017년 수능특강 확률과 통계 104쪽 1번

어느 모집단의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	a	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $a\mathrm{E}(\overline{X})$의 값은?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

EBS 문항 분석

가. 확률분포표를 보고 평균과 분산을 구할 수 있어야 한다.

나. 이산분포를 따르는 모집단에서 크기가 정해진 표본을 추출하였을 때, 모평균과 표본평균의 관계, 모분산과 표본분산을 알 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 모평균 m, 모분산 σ^2인 모집단에서 크키가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

1) $E(\overline{X})=m$

2) $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

3) $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

어느 고등학교에 재학 중인 학생들이 등교하는 데 걸리는 시간은 평균이 50분, 표준편차가 15분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교에 재학 중인학생들 중 임의추출한 25명의 학생들이 등교하는 데 걸리는 시간의 표본평균이 56분 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668 ④ 0.1587 ⑤ 0.1815

EBS 문항 분석

정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 정해진 표본을 추출하였을 때, 모평균과 표본평균의 관계를 알 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

모평균 m, 모분산 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

1) $E(\overline{X})=m$

2) $V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

3) $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

4) 표본의 크기 n이 충분히 큰 수이면 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워지다.

5) 모집단이 정규분포일 때에는 n의 크기에 관계없이 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

2018수능대비 EBS 대표 예제 3

2017년 수능특강 확률과 통계 99쪽 유제 4번

어느 공장에서 생산되는 생수 1병의 용량은 모평균이 m인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 생수 중 100병을 임의추출하여 구한 생수 1병의 용량의 표본평균이 500, 표본표준편차가 15이었다. 이 결과를 이용하여 구한 이 공장에서 생산되는 생수 1병의 용량의 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은? (단, 용량의 단위는 ml이고 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

① $498.13 \le m \le 501.87$ ② $497.13 \le m \le 502.87$ ③ $496.13 \le m \le 503.87$
④ $495.13 \le m \le 504.87$ ⑤ $494.13 \le m \le 505.87$

EBS 문항 분석

가. 모평균의 추정을 할 수 있는지 묻는 문제이다.

나. 모집단의 분포가 정규분포를 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 실제로 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰구간을 구할 수 있어야 한다.

다시 보는 개념 !!

가. 추정

모집단에서 추출한 표본에서 얻은 자료를 근거로 하여 모집단의 어떤 성질을 확률적으로 추측하는 것을 추정이라고 한다.

나. 모평균의 신뢰구간

모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 실제로 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

1) 신뢰도 95%의 신뢰구간 : $\overline{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2) 신뢰도 99%의 신뢰구간 : $\overline{x} - 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

어느 지역에 거주하는 직장인의 70%는 대중교통을 이용하여 출근한다고 한다. 이 지역에 거주하는 직장인 중 2100명을 임의추출할 때, 대중교통을 이용하여 출근하는 직장인의 비율을 $\hat{p}$이라 하자. $\mathrm{P}(0.69 \le \hat{p} \le 0.72)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6247 ② 0.6826 ③ 0.7745 ④ 0.8185 ⑤ 0.9104

EBS 문항 분석

가. 표본비율의 확률분포를 구할 수 있는 묻는 문제이다.

나. 모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$를 따르고, $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따르는 것을 이해한다.

다시 보는 개념 !!

가. 모비율이 p인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본비율 $\hat{p}$에 대하여 다음이 성립한다. (단, $q = 1-p$)

1) $\mathrm{E}(\hat{p}) = p$

2) $\mathrm{V}(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$

3) $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$

나. 모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$에 가까워지고, $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

(단, $0 < p < 1, q = 1-p$)

EBS 기출분석 1

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 가형 13번

정규분포 $\mathrm{N}(0, 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(3, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 1) = P(\overline{Y} \leq a)$를 만족시키는 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{19}{8}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{21}{8}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{23}{8}$

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 107쪽 5번

모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(100, 6^2)$을 따른다. 이 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(X \leq 112) = \mathrm{P}(\overline{X} \geq a)$를 만족시키는 상수 a의 값은?

① 90 ② 92 ③ 94 ④ 96 ⑤ 98

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 개념과 원리를 문제를 축소 변형하여 출제

나. 기출문항과 EBS 교재의 문항은 동일한 개념인 표본평균의 분포를 묻고 있으나 기출문항이 연계문항보다 다소 어렵다.

문항풀이 Point !!

모평균 m, 모분산 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

1) $E(\overline{X}) = m$ 2) $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ 3) $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

4) 표본의 크기 n이 충분히 큰 수이면 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워지다.

5) 모집단이 정규분포일 때에는 n의 크기에 관계없이 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

EBS 기출분석 2

기출 문항 2017학년도 대수능 수학 나형 16번

어느 농가에서 생산하는 석류의 무게는 평균이 m, 표준편차가 40인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농가에서 생산하는 석류 중에서 임의 추출한, 크기가 64인 표본을 조사하였더니 석류 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$이었다. 이 결과를 이용하여, 이 농가에서 생산하는 석류 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하면 $\overline{x}-c \le m \le \overline{x}+c$이다. c의 값은? (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.58) = 0.495$로 계산한다.) [4점]

① 25.8 ② 21.5 ③ 19.2 ④ 12.9 ⑤ 8.6

EBS 교재 2016 수능특강 확률과 통계 107쪽 6번

모평균이 m, 모표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{x}$라 하자. 이 표본을 이용하여 얻은 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $\overline{x}-c \le m \le \overline{x}+c$일 때, c의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

① 0.645 ② 1.29 ③ 2.58 ④ 5.16 ⑤ 10.32

EBS 문항 분석

가. 연계유형 - 동일한 개념 및 원리를 활용하여 출제

나. 기출문제와 EBS 교재의 문항은 표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 것으로 연계율이 높은 문항이다. 모평균 추정에 대한 연습이 충분한 학생은 쉽게 해결할 수 있다.

문항풀이 Point !!

모평균의 신뢰구간

모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 실제로 구한 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰구간은 다음과 같다.

1) 신뢰도 95%의 신뢰구간 : $\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2) 신뢰도 99%의 신뢰구간 : $\overline{x}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

EBS연계 예상문항

2018수능대비 EBS연계 예상문항1 2017 수능특강 확률과 통계 106쪽 3번 변형

어느 제과 회사에서 생산되는 단팥빵의 무게는 표준편차가 8 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제과 회사에서 생산된 단팥빵 중 임의추출한 n개의 무게의 평균으로 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정하면 $\alpha \le m \le \beta$이다. $\beta - \alpha \le 8$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$이다.)

① 16 ② 15 ③ 14 ④ 13 ⑤ 12

풀 이

어느 도시의 성인을 대상으로 특정한 제품을 선호하는 사람의 모비율 p를 조사하려고 한다. 모집단에서 임의추출한 300명을 대상으로 하는 표본에서 n명이 그 제품을 선호한다고 조사되었다. 이 표본의 표본비율 $\hat{p}$을 이용하여 구한 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $[0.201,\ 0.299]$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

풀 이

어느 공장에서 생산되는 제품의 무게가 정규분포 $N(20, 2^2)$을 따른다고 한다. 크기가 4인 표본을 임의로 추출하여 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\overline{X}$가 18이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

① 0.8413 ② 0.9332 ③ 0.9544
④ 0.9772 ⑤ 0.9876

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

풀 이

어느 모집단의 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	4	6	8	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	a	$\frac{1}{10}$	1

이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의로 추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$ 의 표준편차 $\sigma(\overline{X})$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

풀 이