

Q. 쌍곡선 $C_1: x^2 - (y-1)^2 = 1$ 과 직선 $l_1: y = ax$, $l_2: y = bx$ 가 있다. 이때 두 실수 a, b 는 $1 < a < \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < b < -1$ 를 만족한다. 쌍곡선 C_1 과 직선 l_1 이 만나는 두 점을 P, Q라 하고 쌍곡선 C_1 과 직선 l_2 가 만나는 두 점을 R, S라 한다. 네 점 P, Q, R, S가 모두 한 원 C_2 위에 있을 때 원 C_2 의 면적은 $\pi T(a^2)$ 이다. $-T'\left(\frac{3}{2}\right)$ 의 값을 구하시오.

[정답] 64

[해설]

$x^2 - (y-1)^2 = 1$ 과 $y = ax$ (단, $1 < a < \sqrt{2}$, $1 < a^2 < 2$)를 연립하면

$$x^2 - (ax-1)^2 = 1, (1-a^2)x^2 + 2ax - 2 = 0 \dots\dots ①$$

①의 두 근을 α, β 라 하면 α, β 는 P, Q의 x 좌표가 된다.

$$\frac{D}{4} = a^2 - (1-a^2)(-2) = 2 - a^2 > 0$$

$$\alpha + \beta = \frac{2a}{a^2 - 1} > 0, \quad \alpha\beta = \frac{2}{a^2 - 1} > 0$$

$\therefore \alpha > 0, \beta > 0$ 임을 알 수 있다.

마찬가지 방식으로

$x^2 - (y-1)^2 = 1$ 과 $y = bx$ (단, $-\sqrt{2} < b < -1$, $1 < b^2 < 2$)를 연립하면

$$x^2 - (bx-1)^2 = 1, (1-b^2)x^2 + 2bx - 2 = 0 \dots\dots ②$$

②의 두 근을 γ, δ 라 하면 γ, δ 는 R, S의 x 좌표가 된다.

$\therefore \gamma > 0, \delta > 0$ 임을 알 수 있다.

결국 P, Q는 제 1사분면에 R, S는 제 2사분면에 각각 존재한다.

P, Q, R, S는 한 원 C_2 위에 존재하므로 $\overline{OP} \times \overline{OQ} = \overline{OR} \times \overline{OS}$ 가 성립한다.

$$\begin{aligned} \overline{OP} \times \overline{OQ} &= \sqrt{1+a^2} \cdot \alpha \cdot \sqrt{1+a^2} \cdot \beta \\ &= (1+a^2)\alpha\beta = \frac{2(1+a^2)}{a^2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{OR} \times \overline{OS} &= \sqrt{1+b^2} \cdot (-\gamma) \cdot \sqrt{1+b^2} \cdot (-\delta) \\ &= (1+b^2)\gamma\delta = \frac{2(1+b^2)}{b^2-1} \end{aligned}$$

$$\frac{2(1+a^2)}{a^2-1} = \frac{2(1+b^2)}{b^2-1}$$

$$(1+a^2)(b^2-1) = (1+b^2)(a^2-1)$$

$$b^2 = a^2, \quad b = -a \quad (\because b < 0 < a)$$

따라서 P, Q와 R, S는 한 원 위에 존재하면서 y 축에 대칭적으로 배열되어 있으므로 P, Q, R, S를 지나는 원 C_2 의 중심은 y 축 위에 있다.

원 C_2 의 중심을 $H(0, h)$ 라 하고, $P(\alpha, a\alpha)$, $Q(\beta, a\beta)$ 라 놓으면

P, Q의 중점을 지나면서 직선 $\overline{PQ}$ 와 수직인 직선은 원의 중심 H를 지나므로

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{a}\left(0 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \frac{a(\alpha + \beta)}{2} \\ &= -\frac{1}{a}\left(0 - \frac{2a}{2(a^2 - 1)}\right) + \frac{a(2a)}{2(a^2 - 1)} \\ &= \frac{1}{(a^2 - 1)} + \frac{a^2}{(a^2 - 1)} \\ &= \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \end{aligned}$$

원 C_2 의 반지름을 r 이라 하면

$$\begin{aligned} r^2 &= (\overline{HP})^2 = (\alpha - 0)^2 + \left(a\alpha - \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}\right)^2 \\ &= (a^2 + 1)\alpha^2 - \left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}\right)(2a\alpha) + \left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}\right)^2 \end{aligned}$$

①의 한 근이 α 이므로 $(1 - a^2)\alpha^2 + 2a\alpha - 2 = 0$ 를 위 식에 대입하여 정리하면

$$r^2 = \frac{(a^2 + 1)(3 - a^2)}{(a^2 - 1)^2}$$

$$\text{원의 면적 } \pi T(a^2) = \pi r^2 = \frac{(a^2 + 1)(3 - a^2)}{(a^2 - 1)^2} \pi$$

$$\therefore T(x) = \frac{(x + 1)(3 - x)}{(x - 1)^2}$$

$$T'(x) = \frac{-8}{(x - 1)^3}$$

$$T'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-8}{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^3} = -64$$

$$\therefore -T'\left(\frac{3}{2}\right) = 64$$

[다른 풀이]

P, Q, R, S는 $l_1 : y = ax$ 또는 $l_2 : y = bx = -ax$ 를 지나고

쌍곡선 $C_1 : x^2 - (y - 1)^2 = 1$ 을 항상 지나므로

$$(y - ax)(y + ax) = 0, \quad a^2x^2 - y^2 = 0 \text{과}$$

$x^2 - (y - 1)^2 - 1 = 0$ 을 이용해

$$(a^2x^2 - y^2) + k\{x^2 - (y - 1)^2 - 1\} = 0 \text{가 원 } C_2 \text{가 되어야 한다.}$$

x^2 과 y^2 의 계수가 일치해야 하므로 $a^2 + k = -1 - k$, $k = -\frac{a^2 + 1}{2}$ 이다.

$$(a^2x^2 - y^2) - \frac{a^2 + 1}{2}\{x^2 - (y - 1)^2 - 1\} = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2(a^2 + 1)}{a^2 - 1}y + \frac{2(a^2 + 1)}{a^2 - 1} = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}\right)^2 - \frac{2(a^2 + 1)}{a^2 - 1}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}\right)^2 = \frac{(a^2 + 1)(3 - a^2)}{(a^2 - 1)^2} = r^2$$

$$\text{원의 면적 } \pi T(a^2) = \pi r^2 = \frac{(a^2 + 1)(3 - a^2)}{(a^2 - 1)^2} \pi$$

$$\therefore T(x) = \frac{(x + 1)(3 - x)}{(x - 1)^2}$$

$$T'(x) = \frac{-8}{(x - 1)^3}$$

$$T'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-8}{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^3} = -64$$

$$\therefore -T'\left(\frac{3}{2}\right) = 64$$