

2018학년도 강성현 카페인 모의고사 문제지 제 0 회

수학 영역(가형)

홀수형

성명	
----	--

수험번호							-				
------	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

에스프레소 가서 에디오피아 한잔 해야지

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a} = (2, -5)$, $\vec{b} = (1, 0)$ 일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+10x)}{e^{5x}-1}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

3. ${}_4P_2$ 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

4. 두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이고

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

일 때, $P(B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

5. 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 뽑아 세 자리의 정수를 만들 때, 1은 포함되고 6은 포함하지 않는 정수의 개수는? [3점]

- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 36 ⑤ 42

6. 곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 점 $P(6, 4\sqrt{3})$ 을 지나는 접선의 방정식이 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + 2b$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{13\sqrt{3}}{9}$ ② $-\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ③ $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$
 ④ $-\frac{16\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $-\frac{17\sqrt{3}}{9}$

7. 10 개의 제비 중 6 개의 당첨제비가 있다. 이 중 4 개의 제비를 뽑을 때, 모두 당첨제비일 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

8. 두 벡터 $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 3)$ 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

9. $\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx$ 의 값은? [3점]

- ① $e^2 - e - 2$ ② $e^2 - e - 1$ ③ $e^2 - e$
 ④ $e^2 - e + 1$ ⑤ $e^2 - e + 2$

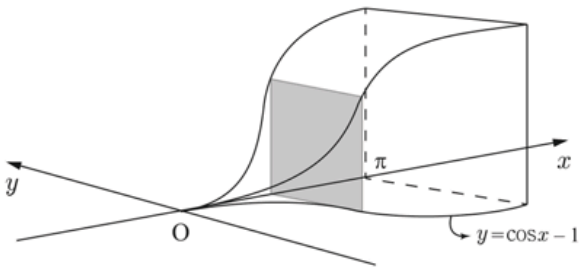
10. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t (t > 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t^2 - \ln t + 2t, \quad y = 2t + \frac{1}{t}$$

이다. 시각 $t = 1$ 에서 점 P의 속력은? [3점]

- ① $\sqrt{5}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

11. 그림과 같이 곡선 $y = \cos x - 1$, x 축 그리고 직선 $x = \pi$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체 도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



- ① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

12. 한 변의 길이가 3인 정사면체 $OABC$ 에 대해 $\overline{OC}$ 의 중점을 P , $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 를 2:1로 내분한 점을 각각 Q, R 이라 하자. 삼각형 PQR 의 삼각형 ABC 위로의 정사영을 $P'Q'R'$ 이라 할 때, 삼각형 $P'Q'R'$ 의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

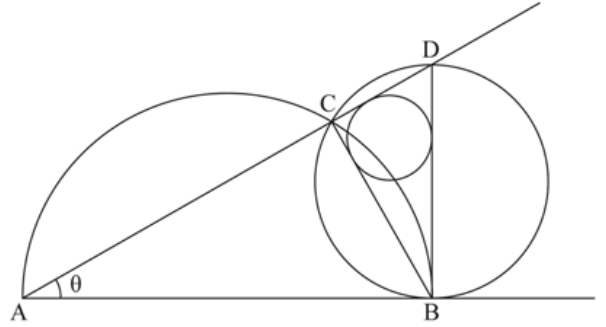
13. A 회사에서 생산되는 휴대폰 배터리는 한 번 충전한 후 완전히 방전되는 데 걸리는 시간이 평균 100시간, 표준편차 12시간인 정규분포를 따른다고 한다.

이 회사에서 생산된 휴대폰 배터리 중에서 하나를 골랐을 때, 한 번 충전한 후 완전히 방전되는 데 걸리는 시간이 88시간 이상 106시간 이하일 확률을 오른쪽 정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
2.0	0.4772

- ① 0.5328 ② 0.6359 ③ 0.6826
④ 0.8185 ⑤ 0.8413

14. 반지름의 길이가 1인 반원의 지름 양 끝점을 A, B라 하고 반원 위의 한 점 C가 있다. 선분 AB의 연장선과 B에서 접하고 C를 지나는 원이 선분 AC의 연장선과 만나는 점을 D라 하자. $\angle CAB = \theta$ 이고 삼각형 BCD에 내접하는 원의 반지름을 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]

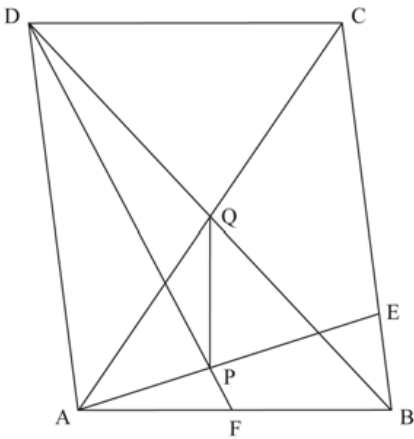


- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

15. 함수 $f(x) = e^{a(x+1)} - ax$ (단, $a > 0$) 위의 한 점 $A(t, f(t))$ 에서의 접선 l 이 원점 O 를 지날 때, $y = f(x)$ 와 접선 l 그리고 y 축으로 둘러싸인 면적을 최소로 하는 a 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

16. 평행사변형 ABCD에서 $|\overrightarrow{AB}| = 4$, $|\overrightarrow{AD}| = 5$, $|\overrightarrow{AC}| = 6$ 이다. 또한 점 B, C를 1:4로 내분하는 점을 E, 선분 AB 위의 점을 F, $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점을 Q, $\overline{DF}$ 와 $\overline{AE}$ 의 교점을 P라 한다. $\overrightarrow{PQ}$ 와 $\overrightarrow{AD}$ 가 서로 평행할 때 $|\overrightarrow{AP}|$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

17. n 이 3이상의 자연수일 때, 다음은 $\sum_{k=1}^n k^2 {}_n C_k$ 를 구하는 과정이다.

먼저, $2 \leq k \leq n$ 을 만족하는 임의의 자연수 k 에 대하여

$k(k-1) {}_n C_k = n(n-1) {}_{n-2} C_{k-2}$ 가 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} \text{(좌변)} &= k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= \boxed{\text{(가)}} \cdot \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= \boxed{\text{(가)}} \cdot {}_{n-2} C_{k-2} = \text{(우변)} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

(1)에 의해 다음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k-1) {}_n C_k &= \sum_{k=2}^n \boxed{\text{(가)}} \cdot {}_{n-2} C_{k-2} \\ &= \boxed{\text{(가)}} \cdot \sum_{k=2}^n {}_{n-2} C_{k-2} \\ &= \boxed{\text{(나)}} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

(1),(2)를 이용하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 {}_n C_k &= \sum_{k=1}^n k {}_n C_k + \boxed{\text{(나)}} \\ &= \boxed{\text{(다)}} + \boxed{\text{(나)}} \end{aligned}$$

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{f(3)g(3)}{h(3)}$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 12

18. 확률변수 X 는 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 따르고 다음과 같은 조건을 만족시킨다.

- (가) $m = P(a \leq X \leq b)$
 $= P(c \leq X \leq d) > 0.5$
 (나) $c - a = 0.5$
 (다) $b - c$ 는 0이 아닌 정수
 (라) $0.75 \leq |a| \leq 1$

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
2.0	0.4772

m 의 최솟값을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?
 [4점]

- ① 0.5228 ② 0.5328 ③ 0.6359
 ④ 0.6826 ⑤ 0.8185

19. 포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 위의 한 점 $P(x_1, y_1)$ 와 초점 F 사이의 거리가 3이 되도록 점 P 를 잡는다. 점 P 에서 그은 접선이 직선 $x = -p$ 와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{FQ} = \sqrt{3}$ 일 때, P 의 x 좌표인 x_1 의 값은? [4점]

- ① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

20. $0 < x < \pi$ 를 만족하는 실수 x 에 대해 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{라 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것만을}$$

있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보기>—

ㄱ. $f'(x)$ 는 $(0, \pi)$ 에서 함숫값의 부호는 바뀌지 않는다..

ㄴ. $(0, \pi)$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 를 항상 만족한다.

ㄷ. $(0, \pi)$ 에서 $g(x)$ 는 감소함수이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 양의 실수 x 에 대해 함수 $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - x \sin 2t| dt$ 일 때,
다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

—<보기>—

ㄱ. $0 < x < \frac{1}{2}$ 일 때 $f(x) = 1 - x$ 이다.

ㄴ. $f(x)$ 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ 이다.

ㄷ. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. ${}_5H_2$ 의 값을 구하십시오. [3점]

23. 부등식 $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geq -1$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 값의
합을 구하십시오. [3점]

24. 점 $A(-2, -2, 0)$ 에서

구 $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z - k = 0$ 에 접선을 그으면 점 P 에서
구와 접한다. $\overline{AP} = 3$ 일 때, 상수 $5k^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분 가능한 함수 $y = f(x)$ 가

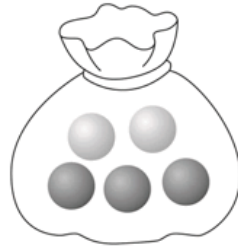
있다. 함수 $y = f(x^3 + x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 하자. 점

$(2, 3)$ 이 $y = f(x)$ 위에 있고 $g'(3) = 2$ 라 할 때, $\frac{1}{f'(2)}$ 의 값을
구하시오. [3점]

26. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니
B에는 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있다. A에서 한 개의
공을 꺼내어 B에 넣고, 그 후 B에서 한 개의 공을 꺼낼 때 그
공이 검은 공이었다면, A에서 꺼낸 공이 흰색이었을 확률은

$\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



A



B

27. 서로 다른 7개의 과자를 똑같은 접시 3개에 빈 접시가 없도록 나누어 담는 방법의 수를 구하시오. [4점]

28. 좌표평면 위의 두 점 $A(0, 1)$ 과 $B(a, 0)$ 을 두 초점으로 가지며 장축의 길이가 2인 타원이 있다. 타원 위의 한 점을 C 라 할 때, 삼각형 ABC 의 면적을 최대로 하게 하는 a 의 값을 M 이라 하자. $10M^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 한 변의 길이가 1인 정사면체 ABCD의 한 면인 삼각형

ABD 위의 한 점 P가 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ 를 만족한다. 또한

삼각형 ACD의 무게중심을 G, 직선 GP가 삼각형 ABC를 포함한 평면과 만나는 점을 Q, 선분 AB 위의 한 점을 R이라 하자. 그러면 삼각형 PRQ는 $\angle PRQ$ 가 직각인 직각 삼각형이 된다. $\overline{AR}$ 의 길이가 $a+b\sqrt{5}$ 일 때 $128(a+b)$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 는 $f(0)=0$,

$f'(0)=1$ 이고 아래와 같은 조건을 만족한다.

(가) $x_1 < x_2 \leq 1$ 를 만족하는 0이 아닌 임의의 두 실수 x_1 ,

x_2 에 대해 $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2}$ 가 성립한다.

(나) $f(1)=f'(1)$

(다) $y=f(x)$, $y=x+t$ 의 교점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때

함수 $y=g(t)$ 의 불연속점의 개수는 2개다.

$\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{p}{q}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

강성현 카페인 모의고사 0회 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 '가'형 정답

1	②	2	①	3	⑤	4	③	5	④
6	④	7	②	8	①	9	④	10	③
11	②	12	⑤	13	①	14	③	15	④
16	⑤	17	①	18	②	19	⑤	20	⑤
21	③	22	15	23	11	24	45	25	8
26	17	27	301	28	10	29	32	30	37

해설

1. [정답] ②

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-5) \times 0 = 2$$

2. [정답] ①

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x}{e^{5x} - 1} \times \frac{\ln(1+10x)}{10x} \times 2 \\ &= 1 \times 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

3. [정답] ⑤

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

4. [정답] ③

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = 0$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B)$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

5. [정답] ④

$$2, 3, 4, 5 \text{ 중에서 2개의 숫자를 뽑는 경우의 수 : } {}_4C_2 = 6$$

$$3개의 숫자를 일렬로 배열하는 방법의 수 : 3! = 6$$

$$6 \times 6 = 36$$

6. [정답] ④

접선의 방정식은

$$\frac{6}{9}x - \frac{4\sqrt{3}}{16}y = 1$$

정리하면

$$y = \frac{8}{3\sqrt{3}}x - \frac{12}{3\sqrt{3}}$$

$$a + 2b = \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{24}{3\sqrt{3}} = -\frac{16}{3\sqrt{3}} = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

7. [정답] ②

$$\text{전체 경우의 수 : } {}_{10}C_4 = 210(\text{가지})$$

$$\text{당첨 제비 6개 중 4개를 뽑는 경우의 수 : } {}_6C_4 = 15(\text{가지})$$

$$\therefore \frac{{}_6C_4}{{}_{10}C_6} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

8. [정답] ①

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{14}$$

9. [정답] ④

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx &= \left[\ln|x| + x \right]_e^{e^2} \\ &= (2 - 1) + (e^2 - e) \\ &= e^2 - e + 1 \end{aligned}$$

10. [정답] ③

$$\frac{dx}{dt} = 2t - \frac{1}{t} + 2$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{1}{t^2}$$

$t = 1$ 일 때 속력을 $V_{t=1}$ 라 하면

$$\begin{aligned} V_{t=1} &= \sqrt{(2 - 1 + 2)^2 + (2 - 1)^2} \\ &= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

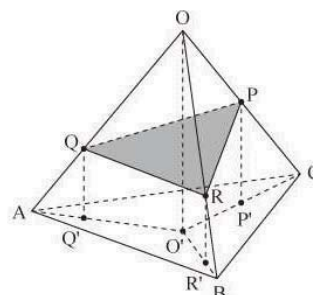
11. [정답] ②

$$\begin{aligned} \int_0^\pi y^2 dx &= \int_0^\pi (\cos x - 1)^2 dx \\ &= \int_0^\pi (\cos^2 x + 1) dx \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} + 1 \right) dx \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^\pi \\ &= \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

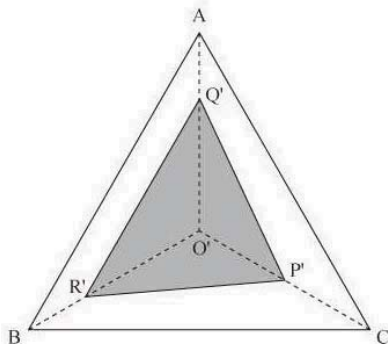
[다른 풀이]

$$\begin{aligned} \int_0^\pi y^2 dx &= \int_0^\pi (\cos x - 1)^2 dx \\ &= \int_0^\pi (\cos^2 x + 1) dx \quad \left(\because y = 2\cos x \text{가 } \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \text{ 점대칭} \right) \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} + 1 \right) dx \\ &= \int_0^\pi \frac{3}{2} dx \quad \left(\because y = \cos 2x \text{의 주기가 } \pi \right) \\ &= \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

12. [정답] ⑤



O, P, Q, R에서 밑면에 내린 수선의 발 점을 각각 O', P', Q', R'라 하자.



$$\begin{aligned} (\text{삼각형 } ABC \text{의 면적}) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3} \\ (\text{삼각형 } OAB \text{의 면적}) &= (\text{삼각형 } OBC \text{의 면적}) = (\text{삼각형 } OCA \text{의 면적}) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{9}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{이때, } \overline{O'P'} = \frac{1}{2}\overline{O'C}$$

$$\overline{O'Q'} = \frac{2}{3}\overline{O'A}$$

$$\overline{O'R'} = \frac{2}{3}\overline{O'B} \text{ 이므로}$$

$$(\text{삼각형 } O'Q'R' \text{의 면적}) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(\text{삼각형 } O'Q'P' \text{의 면적}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(\text{삼각형 } O'P'R' \text{의 면적}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore (\text{삼각형 } P'R'Q' \text{의 면적}) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

13. [정답] ①

휴대폰 배터리가 한 번 충전되고 완전히 방전되는데 걸리는 시간을 X 라 하자.

$X \sim N(100, 12^2)$ 이다.

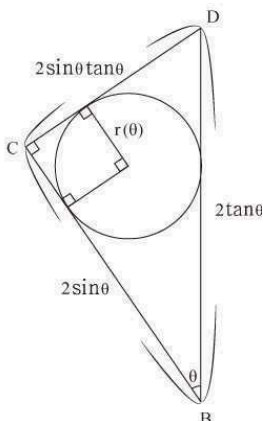
$$\begin{aligned} P(88 \leq X \leq 106) &= P\left(\frac{88-100}{12} \leq Z \leq \frac{106-100}{12}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.3413 + 0.1915 \\ &= 0.5328 \end{aligned}$$

14. [정답] ③

$$\angle ACB = \angle BCD = 90^\circ$$

삼각형 BCD는 직각삼각형이므로 $\overline{BD}$ 는 원의 지름이다.

$$\angle ABD = 90^\circ, \angle CBD = \theta$$



$$\frac{1}{2} \times r(\theta) \times (2\sin\theta\tan\theta + 2\sin\theta + 2\tan\theta) = \frac{1}{2} \times 2\sin\theta \times 2\sin\theta\tan\theta$$

정리하면

$$\begin{aligned} r(\theta) &= \frac{2\sin^2\theta\tan\theta}{\sin\theta\tan\theta + \sin\theta + \tan\theta} \\ &= \frac{2\sin^3\theta}{\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \sin\theta} \\ &= \frac{2\sin^2\theta}{\sin\theta + \cos\theta + 1} \end{aligned}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{r(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\theta}{\theta^2(\sin\theta + \cos\theta + 1)} = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$$

15. [정답] ④

$$f(x) = e^{a(x+1)} - ax$$

$$f'(x) = a \cdot e^{a(x+1)} - a$$

$A(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$l: y = a(e^{a(t+1)} - 1)(x - t) + e^{a(t+1)} - at$$

$$y = a(e^{a(t+1)} - 1)x + (-at + 1)e^{a(t+1)}$$

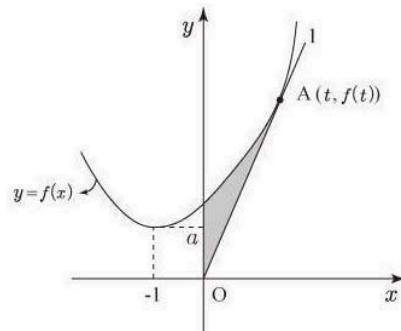
l 이 원점을 지나므로

$$at = 1, t = \frac{1}{a}$$

정리하면

$$l: y = a \cdot (e^{a+1} - 1)x$$

$y = f(x)$ 와 접선 l 그리고 y 축으로 둘러싸인 면적을 $S(a)$ 라 하면 다음과 같다.



$$S(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} \{e^{a(x+1)} - ax - a(e^{a+1} - 1)x\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{a}} (e^{a(x+1)} - a \cdot e^{a+1}x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{a}e^{a(x+1)} - \frac{a}{2}e^{a+1}x^2 \right]_0^{\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{a}(e^{a+1} - e^a) - \frac{1}{2a}e^{a+1}$$

$$= \frac{2(e-1)}{2a}e^a - \frac{e}{2a}e^a$$

$$= \left(\frac{e-2}{2a} \right) \cdot e^a$$

$$S'(a) = -\frac{(e-2)}{2a^2} \cdot e^a + \frac{e-2}{2a} \cdot e^a$$

$$= \frac{(e-2)}{2a^2} \cdot e^a \left(-1 + \frac{1}{a} \right)$$

$S(a)$ 는 $a=1$ 에서 극솟값을 가지므로 $a=1$ 에서 최솟값을 갖는다.

16. [정답] ⑤

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ 라 하자.

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{4}{5}\vec{a} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - k\left(\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - k\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{5}\right)\vec{b}$$

$\vec{PQ} \parallel \vec{AD}$ 이므로 $\vec{a}$ 의 계수가 0

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

$$\vec{AP} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\right)$$

$$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5, |\vec{a} + \vec{b}| = 6 \text{ 이므로}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 36$$

$$16 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 25 = 36$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AP}|^2 &= \left| \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\right) \right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{10}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{100}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{16}{4} + \frac{1}{10}\left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{25}{100} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{AP}| = 2$$

[다른 풀이]

평행사변형 두 대각선의 교점은 각 대각선의 중점이 된다. 또 $\vec{PQ} \parallel \vec{BC}$

이므로 $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AE}$ 가 성립한다.

삼각형 ABC에서 각 $\angle ABC$ 의 크기를 θ 라고 하자. 그러면

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 5 \cos \theta \text{가 성립한다. } \therefore \cos \theta = \frac{1}{8}$$

삼각형 ABE에서

$$\vec{AE}^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \times 4 \cos \theta = 16$$

$$\therefore \vec{AE} = 4$$

따라서 선분 $\vec{AP}$ 의 길이는 $\frac{1}{2} \times 4 = 2$

17. [정답] ①

$$\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}$$

$$= n \times (n-1) \times {}_{n-2}C_{k-2}$$

$$\therefore (가) = n \times (n-1) = f(n)$$

$$\sum_{k=2}^n {}_{n-2}C_{k-2} = {}_{n-2}C_0 + {}_{n-2}C_1 + \cdots + {}_{n-2}C_{n-2}$$

$$= 2^{n-2}$$

$$\therefore (나) = n(n-1)2^{n-2} = g(n)$$

$$\sum_{k=1}^n {}_{n-1}C_{k-1} = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1}$$

$$= 2^{n-1}$$

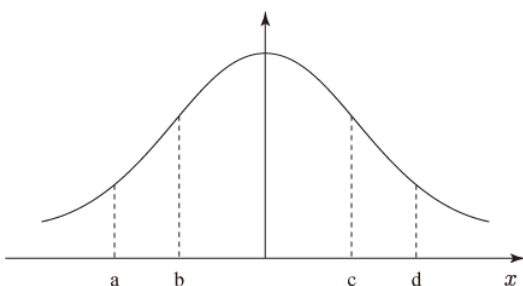
$$\therefore (다) = n \times 2^{n-1} = h(n)$$

$$f(3) = 6, g(3) = 12, h(3) = 12$$

$$\therefore \frac{f(3)g(3)}{h(3)} = 6$$

18. [정답] ②

(가) 조건에 의해 a 와 b 그리고 c 와 d 는 각각 부호가 같을 수 없다. 만약 부호가 같다면 다음 그림처럼 m 이 0.5보다 클 수가 없게 되어 주어진 조건에 모순이 된다.



< $X \sim N(0, 1^2)$ 인 확률밀도함수>

$c - a = 0.5 > 0$ 이므로 $c > a$ 이다.

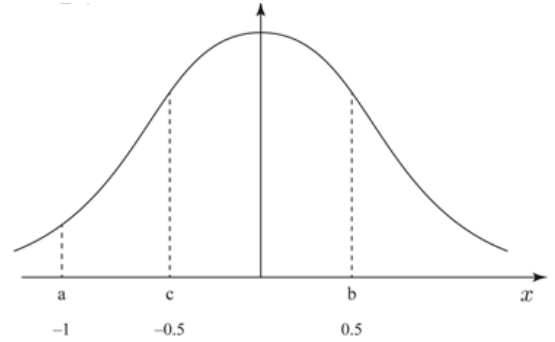
만약 $a > 0$ 이면 $m = P(a \leq X \leq b)$ 은 0.5보다 클 수가 없게 되어 주어진 조건에 모순이 된다. 이는 $c > 0$ 일 때도 마찬가지이다.

따라서 $a < c < 0 < b < d$ 가 된다.

이때 $b - a = (b - c) + (c - a) = (b - c) + 0.5$ 이므로 $m = P(a \leq X \leq b)$ 는 $b - c$ 의 값이 작을수록 작아진다. $c < b$ 이므로 (다) 조건에 의해 $b - c$ 는 0이 아닌 정수 즉 1, 2, 3, ...의 값을 가질 수 있다. 따라서 m 의 값이 최소가 되려면 $b - c = 1$ 이어야 하고 $b - a = 1.5$ 가 된다.

한편, $0.75 \leq |a| \leq 1$ 인데 $a < 0$ 이므로 $-1 \leq a \leq -0.75$ 의 범위를 갖는다. 이러한 상황들을 종합하여 a 값의 변화에 따른 m 값의 변화를 살펴보면 다음과 같다.

i) $a = -1$ 일 때



$$b - a = 1.5, c - a = 0.5 \text{이므로 } a = -1, c = -0.5, b = 0.5$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(c \leq X \leq d) \text{이므로 } d = 1$$

이때 $m = P(a \leq X \leq b)$

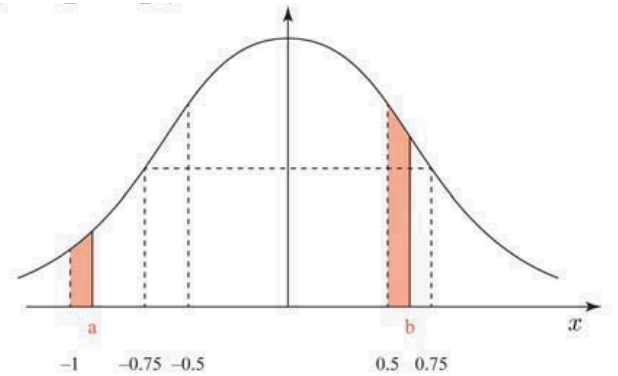
$$= P(-1 \leq X \leq 0.5)$$

$$= P(0 \leq X \leq 1) + P(0 \leq X \leq 0.5)$$

$$= 0.3413 + 0.1915$$

$$= 0.5328 \text{이다.}$$

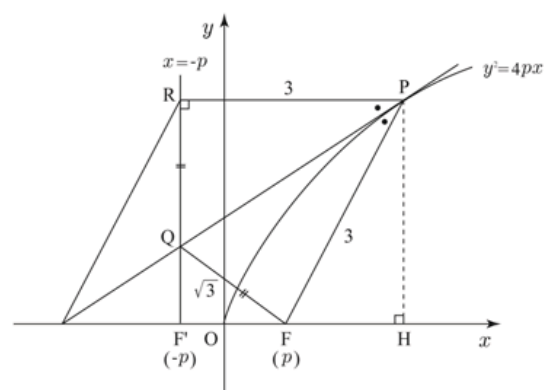
ii) $-1 < a \leq -0.75$ 일 때



그림에서 알 수 있듯이 a 값이 커짐에 따라 $x < 0$ 일 때 줄어드는 부분보다 $x > 0$ 일 때 증가하는 부분이 더 크므로, $m = P(a \leq X \leq b)$ 은 더 커짐을 알 수 있다.

i), ii)를 종합하여 볼 때, $a = -1$ 일 때 $m = P(a \leq X \leq b)$ 은 최솟값 0.5328을 갖음을 알 수 있다.

19. [정답] ⑤



$(-p, 0)$ 을 점 F'라 하고, 점 P에서 직선 $x=-p$ 에 내린 수선의 발을 R이라 하자. 또 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\triangle PFQ \equiv \triangle PRQ$ ($\because \overline{PQ}$ 공통, $\angle FPQ = \angle RPQ$, $\overline{PF} = \overline{PR}$)

$$\therefore \overline{FQ} = \overline{RQ} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\sqrt{3} \quad (\because \triangle PQR \text{ 이 직각삼각형})$$

$$\therefore \angle FPQ = 30^\circ$$

$$\therefore \angle PFH = 60^\circ$$

$$\therefore \overline{FH} = \frac{3}{2}, \overline{F'H} = \overline{RP} = 3$$

$$\overline{F'H} = 2p + \frac{3}{2} = 3$$

$$\therefore p = \frac{3}{4}$$

$$x_1 = \overline{OH} = p + \frac{3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

20. [정답] ⑤

$$\neg. f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

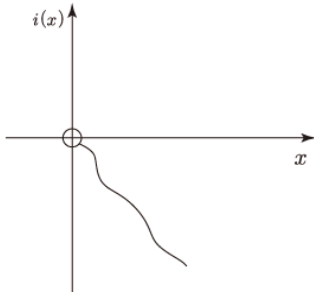
$f'(x)$ 의 분자를 $i(x) = x \cos x - \sin x$ 라 할 때

$$i'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x$$

$$= -x \sin x < 0$$

$i(x)$ 는 감소함수

$$\lim_{x \rightarrow 0+} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right) = 0$$



$$i(x) < 0$$

$\therefore f'(x) < 0$ ($0 < x < \pi$) 함수 부호가 바뀌지 않는다. (○)

$$\neg. h(x) = g(x) - f(x)$$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x)$$

$$= -\frac{1}{x} g(x) + \frac{1}{x} f(x)$$

$$= -\frac{1}{x} (g(x) - f(x))$$

$$= -\frac{1}{x} h(x)$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = -\frac{1}{x}$$

$$h(x) = \int \left(-\frac{1}{x} \right) dx = -\ln x + C$$

$$= \ln \frac{e^C}{x}$$

$$\therefore h(x) = \frac{e^C}{x} > 0 \quad (0 < x < \pi)$$

$$g(x) - f(x) > 0, g(x) > f(x), g(x) \geq f(x) \quad (\circ)$$

$$\sqcup. g'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x)$$

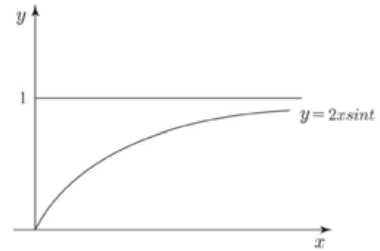
$$= -\frac{1}{x} g(x) + \frac{1}{x} f(x)$$

$$= -\frac{1}{x} (g(x) - f(x)) < 0$$

$\therefore g(x)$ 는 감소함수이다. (○)

21. [정답] ③

$\neg. 0 < x < \frac{1}{2}$ 일 때



$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t - 2x \cos t \cdot \sin t| dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t |1 - 2x \sin t| dt$$

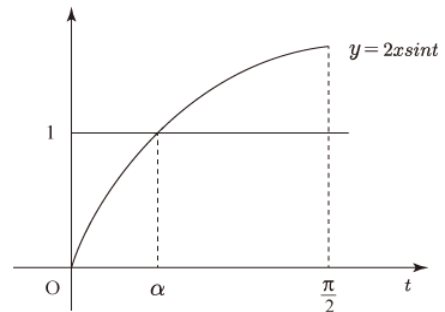
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (1 - 2x \sin t) dt \quad \left(\because 0 < x < \frac{1}{2} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - x \sin 2t) dt$$

$$= \left[\sin t + \frac{x}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} (-1 - 1) = 1 - x \quad (\circ)$$

$\neg. \frac{1}{2} \leq x$ 일 때



(단, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$)

$$f(x) = \int_0^\alpha \cos t (1 - 2x \sin t) dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \cos t (2x \sin t - 1) dt$$

$$= \int_0^\alpha (\cos t - x \sin 2t) dt + \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (x \sin t - \cos t) dt$$

$$= \left[\sin t + \frac{x}{2} \cos 2t \right]_0^\alpha + \left[-\frac{x}{2} \cos 2t - \sin t \right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin \alpha + \frac{x}{2} (\cos 2\alpha - 1) - \frac{x}{2} (-1 - \cos 2\alpha) - (1 - \sin \alpha)$$

$$= \sin \alpha + \frac{x}{2} \cos 2\alpha - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cos 2\alpha - 1 + \sin \alpha$$

$$= x \cos 2\alpha + 2\sin \alpha - 1 = x \left(1 - 2 \left(\frac{1}{2x} \right)^2 \right) + \frac{1}{x} - 1$$

$$= x - \frac{1}{2x} + \frac{2}{2x} - 1 = x + \frac{1}{2x} - 1$$

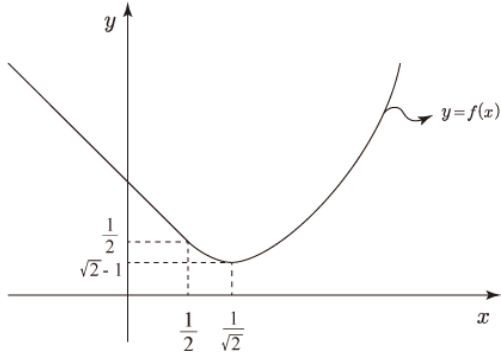
$$\therefore f(x) = \begin{cases} 1 - x & \left(0 < x < \frac{1}{2} \right) \\ x + \frac{1}{2x} - 1 & \left(\frac{1}{2} \leq x \right) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \text{ 일 때, } f'(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x^2 - 1}{2x^2}$$

함수 $y = f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	$\frac{1}{2}$	$\dots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\dots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{2}-1$	$\nearrow$

그에 따른 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore f(x)$ 의 최솟값은 $\sqrt{2}-1$ 이다. ($\times$)

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x + \frac{1}{2x} - 1\right) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln x - x\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\ln \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \quad (\text{O}) \end{aligned}$$

22. [정답] 15

$$\begin{aligned} {}_5\text{H}_2 &= {}_{5+2-1}\text{C}_2 \\ &= {}_6\text{C}_2 = 15 \end{aligned}$$

23. [정답] 11

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$x-4 > 0, \quad x-4 \leq 2$$

$$x > 4, \quad x \leq 6$$

$$4 < x \leq 6 \text{인 자연수 } x = 5, 6$$

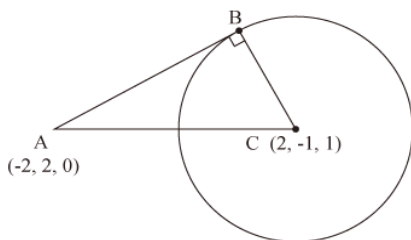
$$\therefore 5+6=11$$

24. [정답] 45

구의 방정식을 정리하면

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = k+6$$

구의 중심을 C라 하면 C의 좌표는 $(2, -1, 1)$ 이다. 점 A에서 구에 그은 접선 중 하나를 l 이라 하고, l 이 구와 만나는 접점을 B라고 하면 다음과 같다.



$$\overline{BC} = \sqrt{k+6}, \quad \overline{AB} = 3$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{18} \text{ 이므로}$$

$$\therefore 18 = k+6+9$$

$$k = 3, \quad \therefore 5k^2 = 45$$

25. [정답] 8

$h(x) = f(x^3 + x)$ 라 하자.

함수 f 와 함수 $y = x^3 + x$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하므로 함수 h 도 미분 가능하며, 역함수를 가진다.

$h(g(x)) = x$ 이므로 양 변을 x 에 대해 미분하면

$$h'(g(x))g'(x) = 1 \quad \text{①}$$

그런데 $h'(x) = (3x^2 + 1)f'(x^3 + x)$ 이므로 $h'(1) = 4f'(2)$

$$\text{즉, } f'(2) = \frac{1}{4}h'(1)$$

$f(2) = 3$ 이므로 $h(1) = f(2) = 3$, 즉, $g(3) = 1$ 이 성립한다.

①에 $x = 3$ 을 대입하면

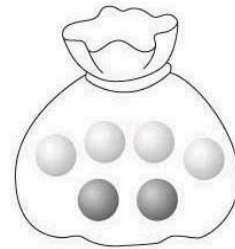
$$h'(1)g'(3) = 1$$

$$\therefore h'(1) = \frac{1}{g'(3)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{f'(2)} = \frac{4}{h'(1)} = 4 \times 2 = 8$$

26. [정답] 17

i) A에서 흰 공을 꺼낸 경우 $\left(\frac{2}{5}\right)$

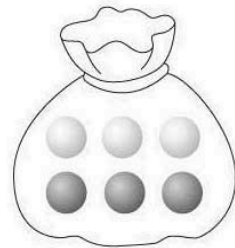


B

$$(B \text{에서 검은 공을 꺼낼 확률}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

ii) A에서 검은 공을 꺼낸 경우 $\left(\frac{3}{5}\right)$



B

$$(B \text{에서 검은 공을 꺼낼 확률}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$\text{i) ii)를 종합하여 } \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15} + \frac{3}{10}} = \frac{4}{4+9} = \frac{4}{13}$$

$$\therefore p+q = 13+4 = 17$$

27. [정답] 301

$$\begin{aligned} 7 &= 5 + 1 + 1 \\ &= 4 + 2 + 1 \\ &= 3 + 3 + 1 \\ &= 3 + 2 + 2 \end{aligned}$$

이므로

i) (5개, 1개, 1개)로 나누어 담는 경우

$${}_7C_5 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 21(\text{가지})$$

ii) (4개, 2개, 1개)로 나누어 담는 경우

$${}_7C_4 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = 105(\text{가지})$$

iii) (3개, 3개, 1개)로 나누어 담는 경우

$${}_7C_3 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 70(\text{가지})$$

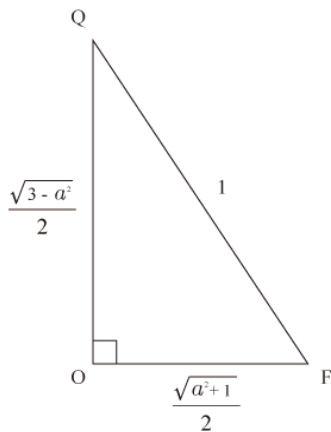
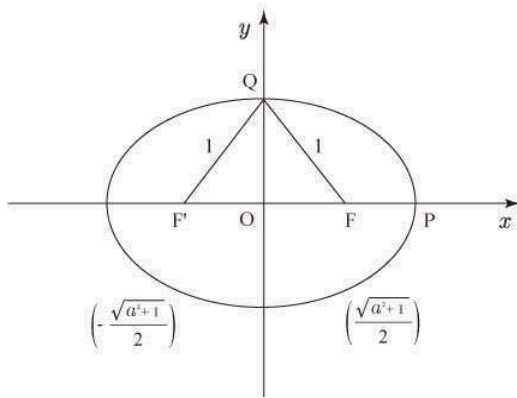
iv) (3개, 2개, 2개)로 나누어 담는 경우

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 105(\text{가지})$$

이를 모두 더하면 $21 + 105 + 70 + 105 = 301(\text{가지})$

28. [정답] 10

$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + 1}$, 장축의 길이가 2이므로 원래의 타원을 다음과 같이 다시 그릴 수 있다.



삼각형 ABC의 면적 $S(a)$ 는 삼각형 F'QF의 면적과 같으므로

$$S(a) = \frac{1}{2} \times \sqrt{a^2 + 1} \times \frac{\sqrt{3 - a^2}}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + 1)(3 - a^2)}$$

이때 $a^2 = t$ 로 치환 ($0 \leq t < 3$)

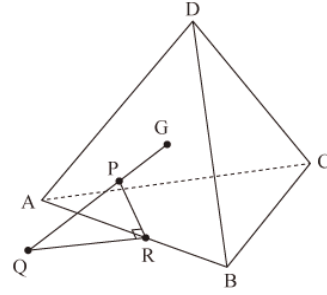
$$S(a) = \frac{1}{4} \sqrt{f(t)} \quad (f(t) = (t+1)(3-t))$$

$f(t)$ 가 최대일 때 $S(a)$ 도 최대이므로

$$\begin{aligned} f(t) &= -t^2 + 2t + 3 \\ &= -(t^2 - 2t + 1) + 4 \\ &= -(t-1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$t=1$ 일 때 최대이므로 $10M^2 = 10$ 이다.

29. [정답] 32



$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ 라 하자.

정사면체의 한 변의 길이가 1이므로

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$$

직선 GP 위의 점 Q는 실수 q 를 이용하여

$$\overrightarrow{AQ} = q\overrightarrow{AP} + (1-q)\overrightarrow{AG}$$

$$= q\left(\frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d}\right) + (1-q)\left(\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}\right)$$

Q는 평면 ABC 위에 있으므로 $\vec{d}$ 의 계수는 0이다.

$$q \cdot \frac{1}{4} + (1-q) \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\therefore q = 4$$

$$\therefore \overrightarrow{AQ} = 4 \cdot \frac{1}{8}\vec{b} - 3 \cdot \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$$

$\angle PQR = 90^\circ$ 이므로 $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$

R은 선분 AB 위의 점이므로 $\overrightarrow{AR} = k\vec{b}$ ($0 \leq k \leq 1$)

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP} = k\vec{b} - \left(\frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d}\right)$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AQ} = k\vec{b} - \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} &= k^2 |\vec{b}|^2 - k\vec{b} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d}\right) + \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) \right\} \\ &\quad + \left(\frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) \end{aligned}$$

$$= k^2 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)k + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8}$$

$$= k^2 - \frac{1}{4}k - \frac{1}{16} = 0$$

$$16k^2 - 4k^2 - 1 = 0, \quad k \text{가 } \overline{AR} \text{의 길이이므로 } k = \frac{1 + \sqrt{5}}{8} = a + b\sqrt{5}$$

$$a = b = \frac{1}{8}, \quad \therefore 128(a+b) = 32$$

30. [정답] 37

조건 (가)에서

$\frac{f(x_1)}{x_1}$ 는 원점과 $(x, f(x_1))$ 사이의 기울기

$\frac{f(x_2)}{x_2}$ 는 원점과 $(x_2, f(x_2))$ 사이의 기울기이다.

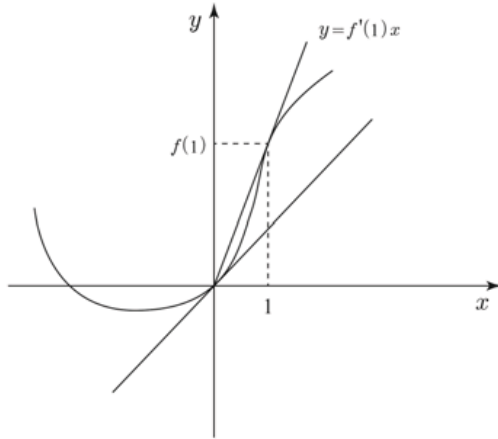
$x_1 < x_2 \leq 1$ 범위에서 $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2}$ 는 x 가 커질수록 원점으로부터

터 $y=f(x)$ 위의 한 점까지의 기울기가 점점 커짐을 의미하므로 $x \leq 0$ 범위에서 함수는 아래로 볼록하여야 한다. 한편, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ 이므로 $y=f(x)$ 는 원점을 지나고 $y=x$ 와 원점에서 접해야 한다. 그러나 $0 < x \leq 1$ 범위에서는 계속해서 아래로 볼록할 필요가 없다. 즉 $x=t$ ($0 < t < 1$)에서 변곡점이 존재하면서 $t \leq x \leq 1$ 에서

$f''(x) < 0$ 이라 하더라도 $y = f(x)$ 가 증가하기만 하면 원점으로부터 $y = f(x)$ 위의 한 점까지의 기울기가 점점 커져야 한다는 (가)조건을 만족시킬 수 있다.

한편 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ 인데 (나)에서 $f(1) = f'(1)$ 이므로 $y = f'(1)(x-1) + f(1) = f'(1)x$ 가 되어 원점을 지나는 직선임을 알 수 있다.

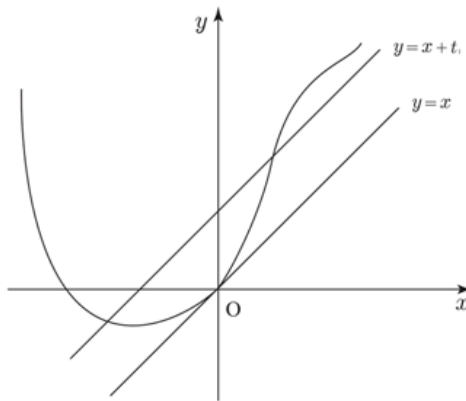
위의 내용들을 종합하여 보면 함수 $y = f(x)$ 는 $x \leq 1$ 범위에서 증가하는데 중간에 변곡점을 가지면서 $y = f'(1)x$ 와 $(1, f(1))$ 에서 접하는 개형을 가짐을 알 수 있다. 그 구체적인 모습은 다음 그림과 같다.



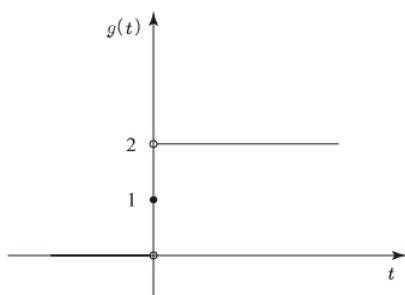
한편 (다)에서 $y = f(x)$ 와 $y = x+t$ 의 교점의 개수를 $g(t)$ 라 하는데 t 는 y 절편이므로 $y = x$ 를 평행이동하면서 $y = f(x)$ 와 만나는 교점의 개수를 따져야 한다.

$y = f(x)$ 의 그래프 개형에 따라 4가지 상황이 있다.

i)



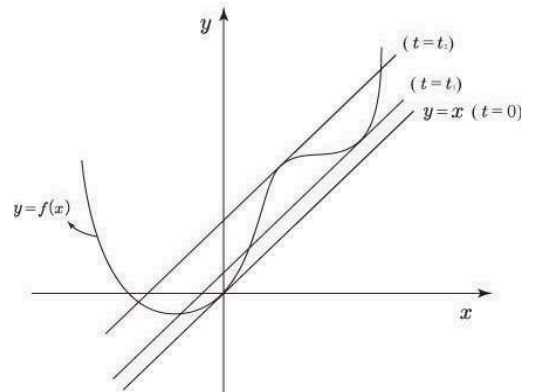
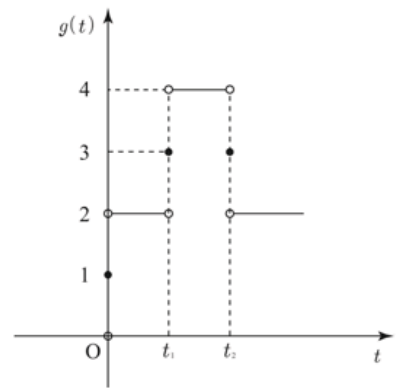
$x > 0$ 범위에서 $y = x$ 와 만나지 않으면서 t 가 변함에 따라 $t > 0$ 에서 $y = x+t$ 와 교점이 계속 2개 존재하는 경우이다.



∴ 불연속점 1개

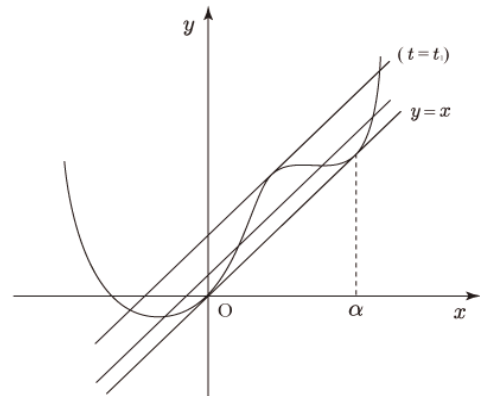
ii)

$y = x$ 와 $x > 0$ 에서 만나지 않으나 $t > 0$ 에서 $y = x+t$ 와 추가적으로 접하는 개형이다.

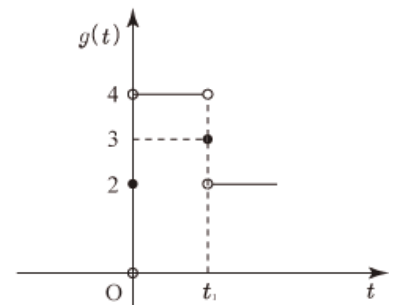


∴ 불연속점 3개

iii)

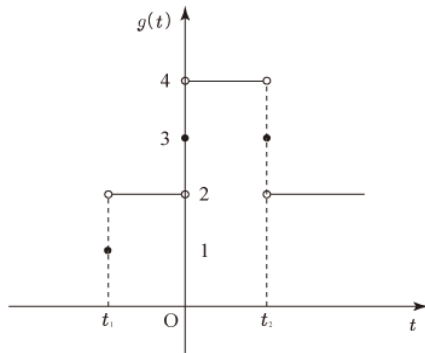
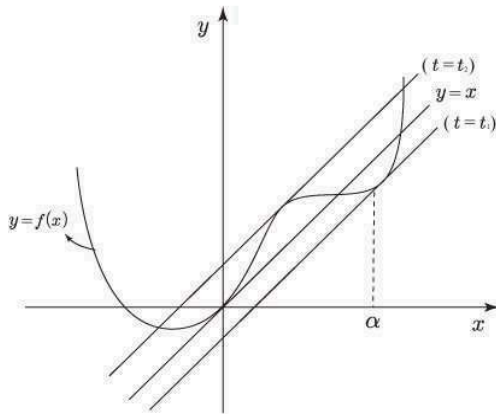


$y = x$ 와 접점이 2개 존재하는 경우이다.



∴ 불연속점 2개

iv)



$\therefore$ 불연속점 3개 ($t_1 < 0$, $t_2 > 0$)

따라서 불연속점이 2개인 경우는 iii)이며 $y=f(x)$ 와 $y=0$ 의 접점이 0과 α 이므로 ($\alpha > 1$)

$$f(x) - x = x^2(x - \alpha)^2$$

$$f'(x) - 1 = 2x(x - \alpha)^2 + 2x^2(x - \alpha)$$

(나)에서 $f(1) = f'(1)$ 이므로

$$f(1) = 1 + (1 - \alpha)^2$$

$$f'(1) = 1 + 2(1 - \alpha)^2 + 2(1 - \alpha)$$

$$(1 - \alpha)^2 = 2(1 - \alpha)^2 + 2(1 - \alpha)$$

$$(1 - \alpha)^2 + 2(1 - \alpha) = 0$$

$$(1 - \alpha)(1 - \alpha + 2) = 0$$

$$\therefore \alpha = 3 \quad (\because \alpha > 1)$$

$$\therefore f(x) = x^2(x - 3)^2 + x = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (x^4 + 9x^2) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{5} x^5 + 3x^3 \right]_0^1$$

$$= 2 \left(\frac{1}{5} + 3 \right) = \frac{32}{5}$$

$$\therefore p + q = 5 + 32 = 37$$

강성현의
Caffeine
모의고사

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.