

대학수학능력시험 대비 포카칩 136제 (가형)

정답 및 해설

제작자 소개

문항 제작

이덕영 (연세대학교 수학과)
(1~2, 4~53, 57~91, 99~126)
문호진 (인하대학교 의예과)
(3, 54~56, 92~98, 127~136)

해설 제작

홍용기 (서울대학교 컴퓨터공학과)

해설을 시작하면서...

포카칩 136제 (가형)은 2009 개정 교육과정 대학수학능력시험을 대비할 수 있도록 만들어졌습니다. 물론 시험을 대비할 뿐만 아니라 수학 학습 전반에 도움이 될 수 있게끔 구성하였습니다.

문항 수는 적지만 풍부한 수학적 상황을 제시하였고, 따라서 다양한 관점으로 접근하면 충분한 학습 효과를 누릴 수 있을 것입니다. 대학수학능력시험 대비 교재이다 보니 문항 형식이 일관된 단점이 있습니다. 학습을 할 때에는 답을 내는 것에만 목적을 두기보다는 문항에서 제시된 상황을 다양한 방법으로 고민해보길 권합니다.

모든 문항은 2010~2016년에 만들어진 ‘포카칩 모의평가’에 수록된 문항 중 선별하였습니다. 이들의 문항은 이미 학교 수업 현장, 학원 등에서 다양하게 활용되었던 검증된 문항들입니다. 실제 평가원 모의고사 유독 유사했던 문항들도 많고 교육청 모의고사에서는 숫자만 다른 완전히 동일한 문항이 나온 적도 있었습니다.

이처럼 여기 있는 문항들이 실제로 출제에 참고가 되는 경우가 많으므로 특히 시험 대비에도 충분히 도움이 될 것입니다. 시험 대비의 관점에서, 특히 가형 응시자들은 포카칩 120제 (나형)도 가급적 풀어볼 것을 강력히 권장합니다.

우리나라 학생들은 어릴 때부터 시험을 보는 것이 공부의 유일한 목적인 경우가 많습니다. 저 역시도 다르지 않았던 것 같습니다. 그러나 오직 시험만을 위하여 공부하는 것은 교육적으로 긍정적인 현상이 아니며, 시험 대비에 큰 비용이 투자되는 것 역시 사회적으로 좋은 현상이 아닙니다.

이러한 이유 때문에 포카칩 136제 (가형)과 포카칩 120제 (나형)은 포만한 수학 연구소 (<http://pnmath.kr>)에서 PDF 파일을 무료로 제공하고 있습니다. 이 교재가 조금이나마 우리의 교육과 사회에 긍정적인 역할을 해주기를 간절히 바랍니다.

빠른 정답

1	①	41	83	81	144	121	②
2	③	42	50	82	②	122	③
3	②	43	④	83	140	123	8
4	25	44	③	84	⑤	124	7
5	32	45	③	85	①	125	⑤
6	④	46	⑤	86	②	126	③
7	④	47	42	87	③	127	65
8	4	48	15	88	530	128	16
9	23	49	30	89	④	129	④
10	②	50	9	90	⑤	130	40
11	②	51	29	91	③	131	24
12	④	52	③	92	⑤	132	⑤
13	④	53	④	93	13	133	⑤
14	③	54	105	94	①	134	30
15	②	55	③	95	④	135	486
16	⑤	56	③	96	①	136	32
17	④	57	⑤	97	16		
18	③	58	144	98	65		
19	④	59	38	99	③		
20	①	60	①	100	49		
21	①	61	49	101	②		
22	①	62	⑤	102	84		
23	17	63	①	103	45		
24	35	64	①	104	③		
25	31	65	②	105	⑤		
26	31	66	③	106	6		
27	②	67	28	107	②		
28	②	68	①	108	120		
29	①	69	④	109	49		
30	⑤	70	④	110	40		
31	①	71	⑤	111	④		
32	③	72	③	112	②		
33	25	73	③	113	①		
34	10	74	②	114	②		
35	21	75	86	115	24		
36	494	76	75	116	42		
37	476	77	④	117	②		
38	②	78	④	118	22		
39	⑤	79	37	119	④		
40	④	80	⑤	120	①		

정답 및 해설

6.

문제의 기준 함수가 $y = \log_3 x$ 이므로 x 좌표가 3의 거듭제곱이 될 때 변화가 있을 것이라 예측할 수 있다.

점을 하나씩 넣어가며 관찰해보면 $\log_3 a$ 가 정수가 되는 어떤 (a, b) 에 대해 a 점+1 에서 b 값이 1 증가함을 알 수 있다.

이러한 점들을 관찰 해보면 2, 4, 10, 28 ...등이 있으며 이 x 값들에서는 점이 두 번 찍힌다.

$x = 27$ 이 될 때까지 찍힌 점의 개수는

$1+2+1+2+1 \times 5+2+1 \times 17$ 이다.

즉, P_{30} 의 좌표는 $(27, 3)$ 이다. 따라서 $P_{31} = (28, 3)$ 이다.

따라서 $p - q = 25$ 이다.

7.

두 함수가 만나는 점에서 Q_n 과 P_n 의 위치가 뒤바뀐다.

길이는 항상 양의 값을 가지므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_n Q_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |4^{1-n} - 2^{-n}|$ 이다.

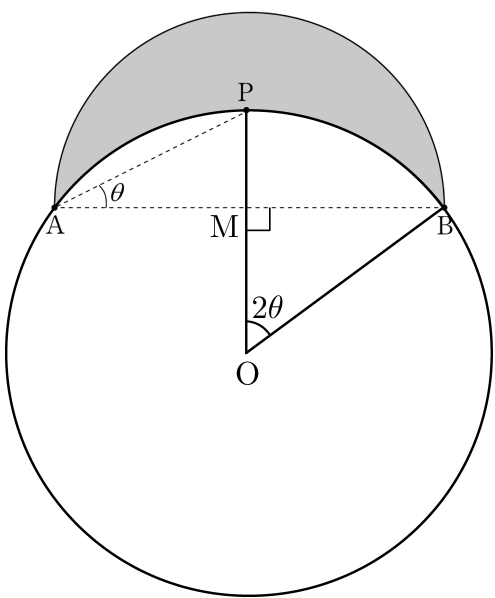
$4^{1-x} = 2^{-x}$ 의 해는 $x = 2$ 이므로 식을 다시 쓰면

$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_n Q_n} = \frac{1}{2} + 0 + \sum_{n=3}^{\infty} (2^{-n} - 4^{1-n}) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{2}{3}$ 이다.

8.

문제에서 선분 AB를 지름으로 하는 원 외에 새로 생긴 원의 중심을 O라 하자. 이때, 각POB는 호 PB에 대한 중심각이고, 각 PAB는 호 PB에 대한 원주각이므로 $2\angle PAB = \angle POB$ 이다. 즉, $\angle POB = 2\theta$ 이다.

그리고 삼각형 APB, 삼각형 ABO가 모두 이등변삼각형이므로 선분 OP와 선분 AB가 만나는 점을 M이라 하면 $\overline{AM} = \overline{MB} = 1$, $\angle OMB = 90^\circ$ 이다.



$\overline{OM} \times \tan 2\theta = 1$ 이므로 $\overline{OM} = \frac{1}{\tan 2\theta}$, $\overline{OB} \times \sin 2\theta = 1$ 이므로

$\overline{OB} = \frac{1}{\sin 2\theta}$ 이다.

$S(\theta)$ 의 넓이는 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 넓이에서 (부채꼴 AOB의 넓이-삼각형AOB의 넓이)를 빼면 된다.

따라서 $S(\theta) = \frac{\pi}{2} - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2\theta \times \frac{1}{\sin^2 2\theta} - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{\tan 2\theta} \right)$ 이고,

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{S(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{\sin^2 2\theta} + \frac{1}{\tan 2\theta}}{\frac{\pi}{4} - \theta}$$

에서 $\frac{\pi}{4} - \theta = t$ 로 치환하면

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{4} - t}{\cos^2 2t} + \tan 2t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\cos^2 2t} \right) + \frac{2t}{\cos^2 2t} + \tan 2t}{t}$$

$= 0 + 2 + 2 = 4$ 이다. 따라서 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{S(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta} = 4$ 이다.

9.

두 곡선의 교점의 x 좌표는 2이고, 그 외의 점에서는 만나지 않는다.

또한 $0 < x < 2$ 인 구간에서는 $\frac{2}{x^3} > \frac{1}{x^2}$ 이고 $x > 2$ 인 구간에서는

$\frac{2}{x^3} < \frac{1}{x^2}$ 이다. 따라서

$$S_1 = \int_1^2 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{4}$$

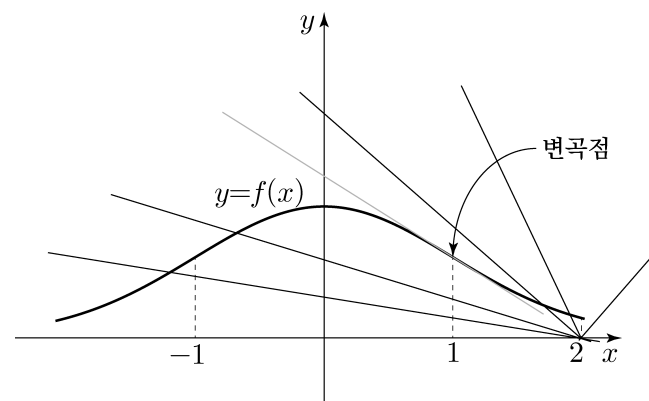
$$S_2 = \int_2^3 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right]_2^3 = \frac{1}{36}$$

이고, $S_1 + S_2 = \frac{5}{18}$ 이다.

10.

함수 $f(x)$ 는 우함수이고, $f'(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$,

$f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 이다. 따라서 그래프의 개형은 다음과 같다.



$t = 2$ 인 경우, $f(t) = f'(a)(t-2)$ 를 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.

$t \neq 2$ 인 경우, $\frac{f(t)}{t-2} = f'(a)$ 이고, 좌변은 점 $(2, 0)$ 과 점 $(t, f(t))$ 를

지나는 직선의 기울기이고, 우변은 함수 $y = f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 접선의 기울기이다.

이를 위에 그린 그림을 활용하여 생각해보면

$\frac{f(t)}{t-2} = f'(1)$ 을 만족시키는 t 를 c_1 이라 할 때, 구간 (c_1, ∞) 에서

$\frac{f(t)}{t-2} = f'(a)$ 를 만족시키는 a 는 2개 존재하고 $g(t) = 2$ 이다.

$t = c_1$ 인 경우 만족하는 a 는 1개이고 $g(c_1) = 1$ 이다.

$\frac{f(t)}{t-2} = f'(-1)$ 을 만족시키는 t 를 c_2 라 할 때, 구간 (c_2, c_1) 에서

정답 및 해설

$\frac{f(t)}{t-2}=f'(a)$ 를 만족시키는 a 는 존재하지 않고 $g(t)=0$ 이다.

$t=c_2$ 인 경우 $g(t)=1$, 구간 (c_2, ∞) 에서는 $g(t)=2$ 이다.

따라서 불연속인 점의 개수는 2이다.

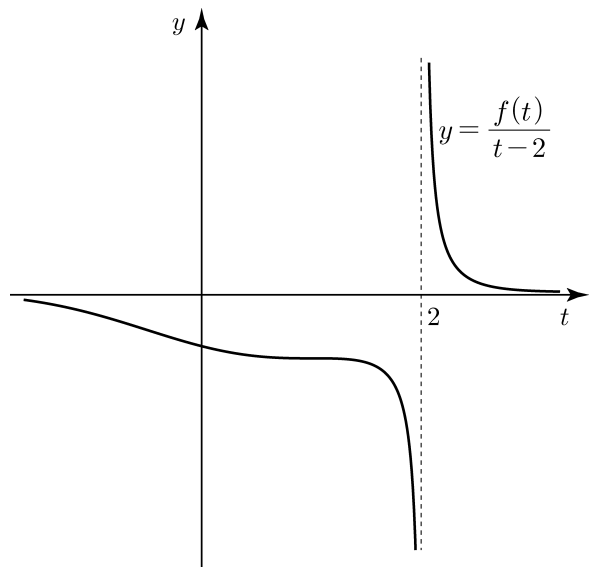
[참고] $y=\frac{f(t)}{t-2}$ 와 $y=f'(a)$ 를 그려서 생각해볼 수도 있다.

$f'(a)$ 의 값이 언제 최대이고 언제 최소인지 알 수 있으므로 곡선

$y=\frac{f(t)}{t-2}$ 의 그래프의 개형과 직선 $y=f'(a)$ (a 를 상수 취급하여 어떤

정해진 값으로 보고 $y-t$ 그래프에서 보면 $y=k$ 와 같은 느낌으로 해석가능하다.)의 교점의 개수를 관찰할 수 있다.

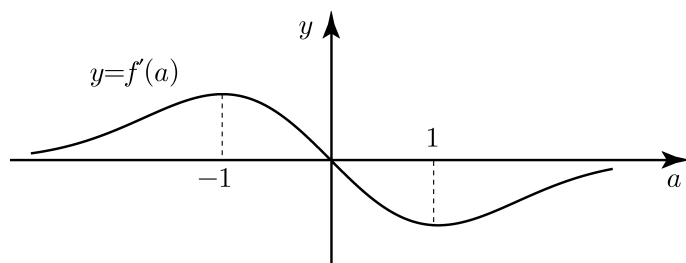
함수 $y=\frac{f(t)}{t-2}$ 와 함수 $y=f'(a)$ 의 그래프의 개형



$y=\frac{f(t)}{t-2}$ 는 구간 $(-\infty, 2)$ 에서 감소하며 $\lim_{t \rightarrow 2-0} \frac{f(t)}{t-2} = -\infty$,

$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f(t)}{t-2} = 0$ 이고, 구간 $(2, \infty)$ 에서 감소하며 $\lim_{t \rightarrow 2+0} \frac{f(t)}{t-2} = \infty$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t-2} = 0$ 이다.



$y=f'(a)$ 는 $x=1, -1$ 에서 극값을 가지며, $\lim_{a \rightarrow \infty} f'(a)=0$,

$\lim_{a \rightarrow -\infty} f'(a)=0$ 이다.

11.

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$ 임에도 불구하고 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 일 수 있으므로

거짓이다. (거짓)

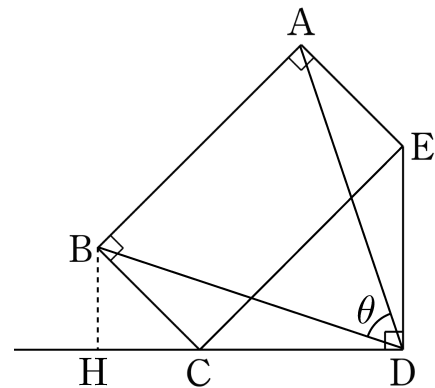
ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{\sin f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{\sin f(x)}{f(x)}} = \frac{1+1}{1} = 2$ 이다. (참)

ㄷ. $g(x)=0$ 인 경우, $f(x)=\sin g(x)=0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0$ 이지만

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)}$ 는 정의되지 않는다. 이 외에도 무수히 많은 반례를 들 수 있다. (거짓)

12.



$\tan \angle ADC = 3$, $\tan \angle BDH = \frac{1}{3}$ 이므로 $\tan \theta = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + 1} = \frac{4}{3}$ 임을 알 수 있다.

13.

$\sqrt{x}=t$ 로 치환하면 $\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2 \sin t^2 dt = \frac{1}{4}$

14.

$\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(1)$ 이 되도록 하는 상수 a 의 값을 찾자.

$\lim_{x \rightarrow 1-0} (g \circ f)(x) = \log_a 3$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} (g \circ f)(x) = 2^2 = (g \circ f)(1)$

따라서 $\log_a 3 = 2^2$ 이면 $x=1$ 에서 연속이다. 곧, $a=3^{\frac{1}{4}}$ 이다.

15.

두 근이 $\sin \alpha, \sin \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\sin \alpha + \sin \beta = 1$, $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{5}$ 이다.

$(\sin \alpha + \sin \beta)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = 1$ 이므로

$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \frac{3}{5}$ 임을 알 수 있다.

$\cos \alpha \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$

$= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$

$= \sqrt{1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{25}}$

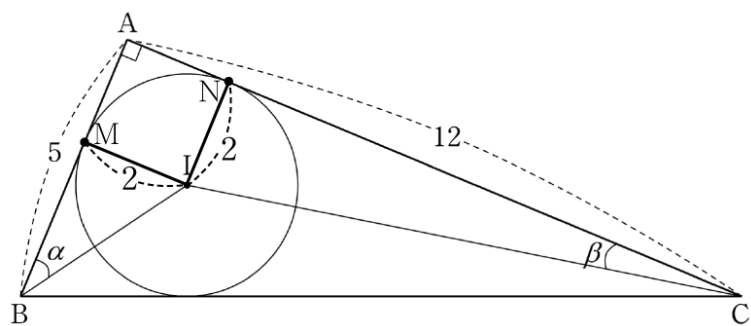
$= \sqrt{\frac{11}{25}}$

따라서,

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{1 + \sqrt{11}}{5}$ 이다.

정답 및 해설

16.



내접원의 반지름은 $\frac{1}{2}(a+b+c) \times r = S$ 를 통해 2임을 알 수 있다.

원의 중심에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M, 선분 AC에 내린 수선의 발을 N 이라고 하자.

$\angle IBM = \angle INC = 90^\circ$ 이므로 $\overline{AM} = \overline{AN} = 2$ 이고

$\tan \alpha = \frac{2}{3}, \tan \beta = \frac{2}{10}$ 임을 알 수 있다.

따라서, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}} = \frac{7}{17}$ 이다.

17.

$X = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{f(0) + f(1)}{2} \right\}$ 를 만족해야 한다.

ㄱ. $\int_0^1 (4x^3 - 2x) dx \leq 1$ 인지를 판단해보면 된다.

$\left[x^4 - x^2 \right]_0^1 = 0$ 이다. 따라서, ㄱ번은 참이다.

ㄴ. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 에 대하여

$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d$ 이고,

$\frac{f(0) + f(1)}{2} = \frac{a + b + c + 2d}{2}$ 이다.

따라서, $\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b \leq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ 이어야 한다. 즉, 이 부등식을

정리하면 $3a + 2b \geq 0$ 이다. 따라서 $f''(x) \geq 0$ 이 아니더라도 얼마든지 위의 부등식을 성립하게 할 수 있다.

ㄷ. $f'(0) = c, f'(1) = 3a + 2b + c$ 이다.

따라서, $f'(0) \leq f'(1)$ 은 곧 $3a + 2b \geq 0$ 임을 의미한다.

ㄴ번과 동치이므로, 참이다.

18.

P는 2^x 상의 점이므로 x 좌표에는 제약이 없으나 Q는 $\log_2 x$ 상의 점이므로 반드시 x 좌표는 1이상임을 알 수 있다.

점 Q를 고정하고 점 P의 좌표에 변화를 주면서 $\overline{PQ} \leq 4$ 를 만족하는 P를 찾아보자.

1) Q의 좌표가 (1, 0)인 경우

P의 좌표	$\overline{PQ}$	조건 만족
$(-3, 2^{-3})$	$\sqrt{16 + 2^{-6}} > 4$	×
$(-2, 2^{-2})$	$\sqrt{9 + 2^{-4}} < 4$	○
$(-1, 2^{-1})$	$\sqrt{4 + 2^{-2}} < 4$	○
$(0, 1)$	$\sqrt{1 + 1} < 4$	○
$(1, 2)$	$\sqrt{0 + 4} < 4$	○
$(2, 4)$	$\sqrt{1 + 16} > 4$	×

Q가 (1, 0)일 때 조건을 만족시키는 P의 x 좌표는 $-2, -1, 0, 1$ 이다.

2) Q의 좌표가 (2, 1)인 경우

P의 좌표	$\overline{PQ}$	조건 만족
$(-2, 2^{-2})$	$\sqrt{16 + (1 - 2^{-2})^2} > 4$	×
$(-1, 2^{-1})$	$\sqrt{9 + (1 - 2^{-1})^2} < 4$	○
$(0, 1)$	$\sqrt{4 + 0} < 4$	○
$(1, 2)$	$\sqrt{1 + 1} < 4$	○
$(2, 4)$	$\sqrt{0 + 9} < 4$	○
$(3, 8)$	$\sqrt{1 + 49} > 4$	×

Q가 (2, 1)일 때 조건을 만족시키는 P의 x 좌표는 $-1, 0, 1, 2$ 이다.

3) Q의 좌표가 $(3, \log_2 3)$ 인 경우

P의 좌표	$\overline{PQ}$	조건 만족
$(-1, 2^{-1})$	$\sqrt{16 + (2^{-1} - \log_2 3)^2} > 4$	×
$(0, 1)$	$\sqrt{9 + (1 - \log_2 3)^2} < 4$	○
$(1, 2)$	$\sqrt{4 + (2 - \log_2 3)^2} < 4$	○
$(2, 4)$	$\sqrt{1 + (4 - \log_2 3)^2} < 4$	○
$(3, 8)$	$\sqrt{0 + (8 - \log_2 3)^2} > 4$	×

Q가 $(3, \log_2 3)$ 일 때 조건을 만족시키는 P의 x 좌표는 $0, 1, 2$ 이다.

4) Q의 좌표가 (4, 2)인 경우

P의 좌표	$\overline{PQ}$	조건 만족
$(0, 1)$	$\sqrt{16 + 1} > 4$	×
$(1, 2)$	$\sqrt{9 + 0} < 4$	○
$(2, 4)$	$\sqrt{4 + 4} < 4$	○
$(3, 8)$	$\sqrt{1 + 36} > 4$	×

Q가 (4, 2)일 때 조건을 만족시키는 P의 x 좌표는 $1, 2$ 이다.

정답 및 해설

5) Q의 좌표가 $(5, \log_2 5)$ 인 경우

P의 좌표	$\overline{PQ}$	조건 만족
(1, 2)	$\sqrt{16 + (2 - \log_2 5)^2} > 4$	×
(2, 4)	$\sqrt{9 + (4 - \log_2 5)^2} < 4$	○
(3, 8)	$\sqrt{4 + (8 - \log_2 5)^2} > 4$	×

Q가 $(5, \log_2 5)$ 일 때 조건을 만족시키는 P의 x 좌표는 2이다.

따라서 P, Q의 x 좌표가 모두 정수인 순서쌍의 개수는 14개이다.

19.

$y = 2\sqrt{x}$ 위의 점을 $(a, 2\sqrt{a})$ 라고 하자.

$(t, 0)$ 과의 거리 $d = \sqrt{(a-t)^2 + 4a} = \sqrt{a^2 - 2at + t^2 + 4a}$

거리의 최솟값을 알기 위해 루트 안의 식을 미분해보자.

$2a - 2t + 4 = 0$ 이므로, $a = \begin{cases} t-2 & (t \geq 2) \\ 0 & (t < 2) \end{cases}$ 일 때 거리가 최소이다.

따라서 거리의 최솟값은 $f(t) = \begin{cases} \sqrt{4t-4} & (t \geq 2) \\ t & (t < 2) \end{cases}$ 이다.

그러므로 $\int_1^2 t dt + \int_2^5 \sqrt{4t-4} dt = \frac{3}{2} + \left[\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_2^5 = \frac{65}{6}$ 이다.

20.

점 B의 x 좌표를 a , 점 A의 x 좌표를 b 라 하자.

$\log_2 a - \log_{\frac{1}{4}} a = \log_{\frac{1}{4}} b - \log_2 b$ 이므로, $\log_2 ab = \log_{\frac{1}{4}} ab$ 이다.

따라서, $ab = 1$ 이다.

한편, 2:5로 내분하는 점의 x 좌표는 $\frac{2a+5b}{7} = 1$ 이므로

$2a+5b=7$ 이다. 둘을 연립하면, $2a + \frac{5}{a} = 7$ 에서

$2a^2 - 7a + 5 = (2a-5)(a-1) = 0$ 이다. 따라서 $a = \frac{5}{2}$ 이다.

(로그함수의 그래프를 조금 더 기하학적인 접근을 할 수도 있다.

또 다른 풀이는 직접 연구해보도록 하자.)

21.

$y = xe^x + \frac{3}{e^x}$, $y = 3e^x + \frac{x}{e^x}$ 의 교점의 x 좌표는 $x=0$, $x=3$ 이다.

두 함수의 대소 비교를 위해

$\left(xe^x + \frac{3}{e^x}\right) - \left(3e^x + \frac{x}{e^x}\right) = \left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)(x-3)$ 에 $[0, 3]$ 사이의 어떤 값인

2를 대입해보면 $\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)(-1) < 0$ 이므로

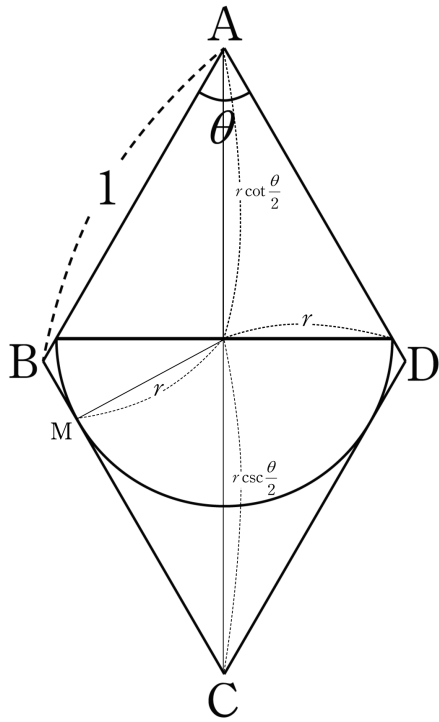
구간 $[0, 3]$ 에서 $3e^x + \frac{x}{e^x} < xe^x + \frac{3}{e^x}$ 임을 알 수 있다.

따라서 둘러싸인 넓이는 $S = \int_0^3 \left\{ \left(xe^x + \frac{3}{e^x}\right) - \left(3e^x + \frac{x}{e^x}\right) \right\} dx$ 이다.

$\int_0^3 (e^{-x} - e^x)(x-3) dx = \left[(-e^{-x} - e^x)(x-3) \right]_0^3 - \int_0^3 (-e^{-x} - e^x) dx$
 $= -6 - e^{-3} + e^3$

따라서, 두 곡선으로 둘러싸인 넓이는 $e^3 - \frac{1}{e^3} - 6$ 이다.

22.



선분 AC의 길이를 r 에 관하여 표현하면

$r \cot \frac{\theta}{2} + r \csc \frac{\theta}{2} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ 이고, r 에 관하여 정리하면

$r = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \frac{\theta}{2}}$ 임을 알 수 있다.

$\overline{BD} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$, $f(\theta) = \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos \frac{\theta}{2}}$

$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{BD} - f(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} - \frac{4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1 + \cos \frac{\theta}{2}}}{\theta^3}$
 $= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}}{\theta^3 \left(1 + \cos \frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{1}{16}$

23.

$f(x)$ 와 $g(x)$ 가 역함수 관계이므로 $f(g(x)) = x$ 이고 $g(0) = 1$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 + 1$ 이므로 (가)조건에 의해 $f(x) = x^3 + x - 2$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - a}{x}$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0) = a$ 이므로 $a = -2$

임을 알 수 있다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{x}$
 $= f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$

역함수의 미분법을 이용하면

$f'(g(x))g'(x) = 1$

$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$

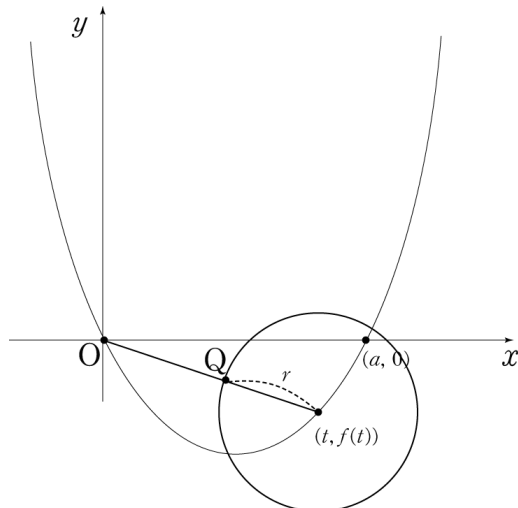
따라서, $b = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = \frac{1}{2}$ 이므로 $4(a^2 + b^2) = 17$ 이다.

정답 및 해설

24.

원과 점 사이의 거리이므로 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

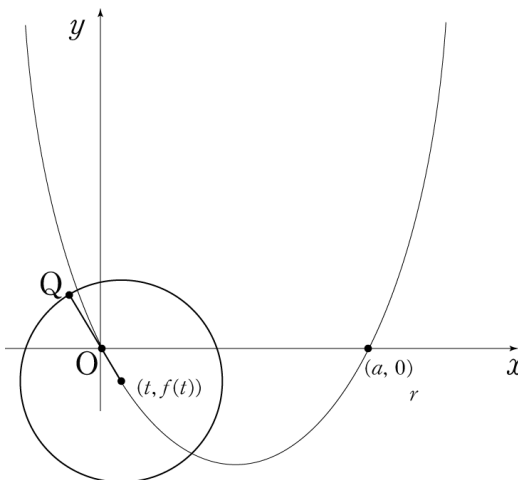
1) 원 밖에 원점이 존재하는 경우



이 경우 원 위의 점 중에서 원점과 가장 가까운 점 Q와의 거리는 원점과 원 중심 사이의 거리에서 반지름을 빼준 값과 같다.

$$g(t) = \sqrt{t^2 + f(t)^2} - r$$

2) 원 내부에 원점이 존재하는 경우



이 경우는 원의 반지름에서 중심과 원점사이의 거리를 빼준 값이 $\overline{OQ}$ 와 같다.

$$g(t) = r - \sqrt{t^2 + f(t)^2}$$

이를 통해 $g(t) = |\sqrt{t^2 + f(t)^2} - r|$ 임을 알 수 있다.

$g(t)$ 가 두 점에서 미분가능하지 않다.

$h(t) = \sqrt{t^2 + f(t)^2}$ 라고 하면 $g(t)$ 는 $y=r$ 을 기준으로 $h(t)$ 를 접어올린 함수이다.

$h(t)$ 에 대해 분석해보면

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{t + f(t)f'(t)}{\sqrt{t^2 + f(t)^2}} = \frac{t + t(t-a)(2t-a)}{\sqrt{t^2 + t^2(t-a)^2}} \\ &= \frac{t}{|t|} \cdot \frac{2t^2 - 3at + a^2 + 1}{\sqrt{1 + (t-a)^2}} \end{aligned}$$

즉, $h(t)$ 의 도함수가 $t=0$ 을 기준으로 음수에서 양수로 바뀔을 통해 $t=0$ 에서 극솟값을 갖는다는 것을 알 수 있다.

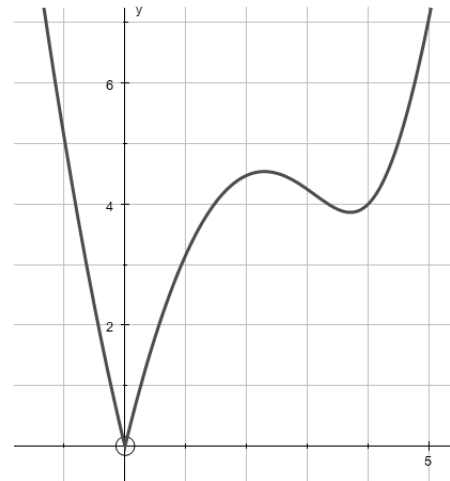
분자인 $r(t) = 2t^2 - 3at + a^2 + 1$ 가 근을 몇 개를 갖는지에 따라 $h(t)$ 가 달라지므로 경우를 나누어 생각해보도록 하자.

1) $D > 0$ 인 경우

$r(t)$ 는 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 근을 갖고, a 가 양수이므로 α, β 는 모두

양수이다. 이 경우 $h(t)$ 는 $t=0, t=\beta$ 에서 극소, $t=\alpha$ 에서 극대이다. $y=h(t)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다.

어떠한 양수 r 을 잡더라도, $y=r$ 을 기준으로 $h(t)$ 를 접어 올리면 $g(t)$ 의 미분가능하지 않은 점의 개수가 3개 이상임을 확인할 수 있다.



2) $D=0$ 인 경우

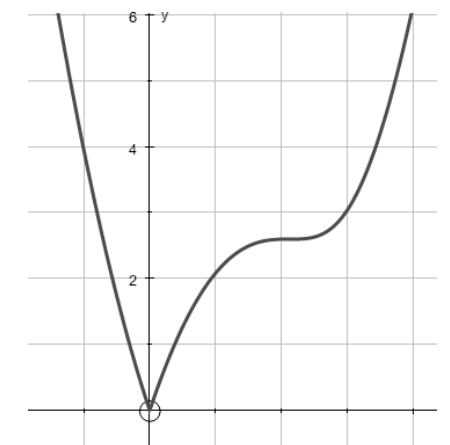
$r(t)$ 는 중근 α 를 갖고, 이때 $a=2\sqrt{2}, \alpha=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다.

이 경우 $h(t)$ 는 $t=0$ 에서 극소이다.

$y=h(t)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다.

$r=h\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 일 때 $y=r$ 을 기준으로 $h(t)$ 를 접어 올리면

$g(t)$ 는 $t=0, t < 0$ 인 어떤 t 에서 미분가능하지 않다. (총 2개)



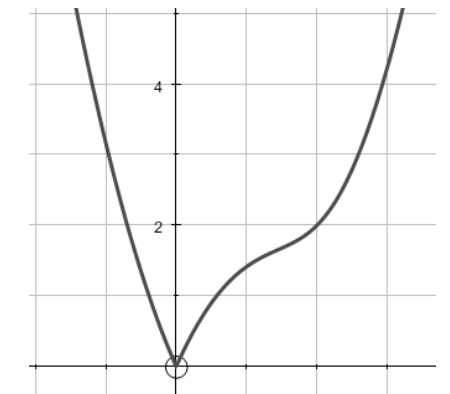
이 경우 $a^2 + 4r^2 = 35$ 임을 알 수 있다.

3) $D < 0$ 인 경우

$r(t)$ 는 근을 갖지 않는다. 이 경우 $h(t)$ 는 $t=0$ 에서 극소이다.

$y=h(t)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다.

어떠한 양수 r 을 잡더라도, $y=r$ 을 기준으로 $h(t)$ 를 접어 올리면 $g(t)$ 의 미분가능하지 않은 점의 개수가 3개임을 확인할 수 있다.



따라서, 2)인 경우가 이 문항의 조건에 모두 부합하고, 답은 35이다.

정답 및 해설

25.

점 P가 $y=20$ 보다 아래에 위치하는 경우와 위에 위치하는 경우 두 가지가 존재하므로 $\overline{PQ}=|20-a^x|$ 로 표현할 수 있다. $a=20$ 이면 $1 \leq \overline{PQ} \leq 18$ 를 만족하지 않는다.

$1 \leq |20-a^k| \leq 18$ 를 풀면

$-18 \leq 20-a^k \leq 18$ (단, $20-a^k \neq 0$) 이다.

$-38 \leq -a^k \leq -2$ ($a^k \neq 20$)

$\therefore 2 \leq a^k \leq 38 \cdots (*)$ ($a^k \neq 20$)

$f(a)=1$ 이므로 $k=1$ 일 때는 $*$ 를 만족하고,

$k=2$ 일 때는 만족하지 않아야 한다.

$\therefore a=7, 8, 9, \dots, 38$ ($a \neq 20$)

따라서 자연수 a 의 개수는 31이다.

26.

$\log_2 x^n - \log_2 x^2 - 6 = 0$ 에서

1) n 이 홀수인 경우

$x > 0$ 이어야 하므로

$\log_2 x^n - \log_2 x^2 - 6 = (n-2)\log_2 x - 6 = 0$ 이다.

$\log_2 x = \frac{6}{n-2}$ 이므로 $n \geq 3$ 에서 오직 하나의 실근을 갖는다.

2) n 이 짝수인 경우

$\log_2 x^n - \log_2 x^2 - 6 = (n-2)\log_2 |x| = 0$ 이다.

$\log_2 |x| = \frac{6}{n-2}$ 이므로 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서, $a_n = \begin{cases} 1 & n=\text{홀수} \\ 2 & n=\text{짝수} \end{cases}$ 이다.

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{2 \times \frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ 이므로 $10p+q=31$ 이다.

27.

인수분해하면, $(2^x - k)(2^x - 8) < 0$ 이다.

이를 만족시키는 자연수 x 의 개수가 1이 되어야 한다.

$k < 8$ 인 경우 : $\log_2 k < x < 3$

$\rightarrow k=2, 3$

$k > 8$ 인 경우 : $3 < x < \log_2 k$

$\rightarrow k=17, 18, \dots, 32$ 따라서, 총 18개다.

28.

사차함수의 도함수인 삼차함수의 근의 개수는 3개, 2개, 1개 인 경우가 있다. 사차함수의 최고차항의 계수가 양수이므로 삼차함수의 근이 2개, 1개인 경우는 부호가 양수에서 음수로 바뀔 수 없으므로 주어진 문제의 도함수는 근이 세 개인 삼차함수가 된다. 이를 통해 사차함수의 개형이 다음 그림과 같은 극대가 존재하는 모양으로 정해짐을 알 수 있다.

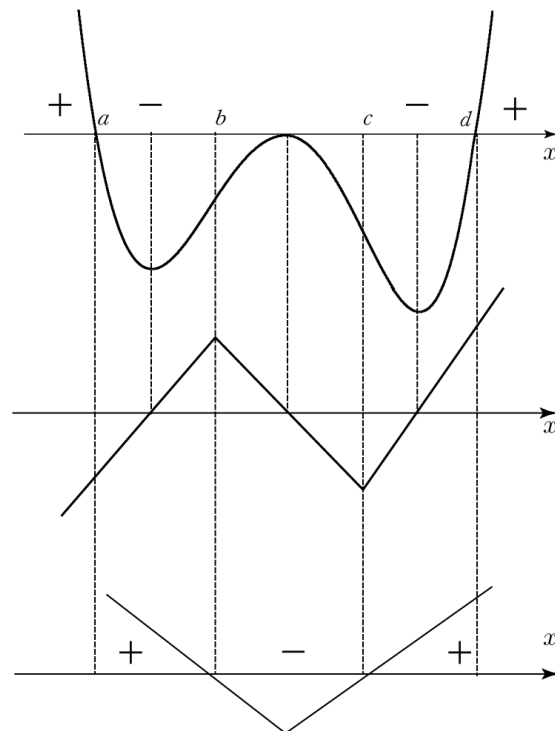
$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 를 미분하면

$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\{f'(x)\}^2}$ 이 된다.

$\{f'(x)\}^2$ 항은 항상 양수이기 때문에 $g'(x)$ 의 부호 변화에 있어서 영향을 주지 않으므로 $f(x)f''(x)$ 의 부호변화를 보자.

$f(x)$ 는 최고차항이 양수이며, 극대가 존재하며 극댓값이 0인 함수이므로 아래와 같이 대략적인 그림이 그려진다.

(순서대로 원함수, 도함수, 이계도함수이며 도함수와 이계도함수는 부호변화에 초점을 맞추어 그렸으며, 도함수가 서로 다른 세 실근을 가지면 물의 정리에 의하여 이계도함수가 서로 다른 두 실근을 가짐을 보일 수 있다.)



$g(x)$ 가 극값을 갖기 위해서는 $g'(x)$ 의 부호 변화가 필요하다. 즉 $f(x)f''(x)$ 의 부호를 구간별로 구해보면

구간	$f(x)$	$f''(x)$	$f(x)f''(x)$
$(-\infty, a)$	+	+	+
(a, b)	-	+	-
(b, c)	-	-	+
(c, d)	-	+	-
(d, ∞)	+	+	+

$f(x)f''(x)$ 의 부호가 4번 바뀔을 통해 $g(x)$ 의 극값이 4개 존재함을 알 수 있다. 따라서 $g(x)$ 가 극값을 갖는 a 의 개수는 4개이다.

29.

$\cos \alpha = -\frac{1}{4}\alpha$, $\cos \beta = -\frac{1}{4}\beta$

$m = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{\cos x}{x^2} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{-\alpha}^{\beta} - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx$
 $= -\frac{\cos \beta}{\beta} - \frac{\cos \alpha}{\alpha} - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx$

따라서, $\int_{-\alpha}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} - m$ 이다.

30.

점 P, Q는 모두 $y=-x$ 위의 점이므로 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 임을 통해 $P(a, -a)$, $Q(a+2, -a-2)$ 로 둘 수 있다.

이를 주어진 함수에 대입하면 $\log_{\frac{1}{2}} a = -a$, $\log_{\frac{1}{2}} (a+2) = -a-2$ 을

정답 및 해설

알 수 있고, 이를 이용하여 $(\log_{\frac{1}{2}} a) - 2 = \log_{\frac{1}{2}} (a + 2)$ 을 풀어주면

$$a = 2^{-\frac{1}{3}} \times 3 \text{임을 알 수 있다.}$$

31.
 $f(x) = (m \sin x + n \cos x)e^{-x}$
 $f''(x) = (-2m \cos x + 2n \sin x)e^{-x}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} f(x) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ 임을 이용해 $\lim_{x \rightarrow 0+} f''(x)$ 를 구하자.

먼저 두 극한식이 각각 $\frac{\pi}{2}$ 와 0으로 수렴한다는 점과 $f(x)$ 와 $f''(x)$ 는 $\cos x$ 의 부호가 반대임을 통해 치환을 생각할 수 있다.
 $t = x - \frac{\pi}{2}$ 로 치환을 하면

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} (m \sin x + n \cos x)e^{-x} = \lim_{t \rightarrow 0+} (m \cos t - n \sin t)e^{-t - \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (m \cos t - n \sin t)e^{-t} \times e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

수렴하는 극한의 성질에 의해

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (m \cos t - n \sin t)e^{-t} = 1 \text{임을 알 수 있다.}$$

따라서 구하고자하는 $\lim_{x \rightarrow 0+} (-2m \cos x + 2n \sin x)e^{-x} = -2$ 이다.

32.
 $-\ln x \leq f(x) - \ln x \leq 1 - \ln x$ 에서 $|f(x) - \ln x|$ 의 최대를 먼저 구해야하므로 $|f(x) - \ln x|$ 는 $\ln x$ 와 $1 - \ln x$ 둘 중 하나일 것이다
 $\ln x = 1 - \ln x$ 인 t 에서 함수의 대소가 바뀔 것을 예상할 수 있으므로
 $g(t) = \begin{cases} 1 - \ln x & (1 \leq t \leq \sqrt{e}) \\ \ln x & (\sqrt{e} \leq t \leq e) \end{cases}$ 이다.

이를 통해 $\int_1^e \frac{g(x)}{x} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1 - \ln x}{x} dx + \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{3}{4}$ 임을 알 수 있다.

따라서 구하고자하는 값은 $\frac{b \times h(e^2)}{a} = \frac{\frac{3}{4} \times 2}{\frac{1}{2}} = 3$ 이다.

33.
 $\angle AOP = \theta$ 이므로 점 Q의 좌표는 $(\sin \theta, \cos \theta)$ 이다.
직선의 방정식은 $y = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}x$ 이고 이 방정식을 $x^2 + 2y = 2$ 에 대입하면
 $x^2 + 2\frac{\cos \theta}{\sin \theta}x - 2 = 0$ 이다. 따라서 점 P의 x 좌표는

$$\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

두 점 P, Q의 x 좌표끼리의 차는 $\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \sin \theta$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \theta \sin^2 \theta} + \frac{2}{\sin^2 \theta}} - \frac{1}{\tan \theta \sin \theta} - 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}}{\theta^4} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 + 2 \tan^2 \theta} - (\tan \theta \sin \theta + 1)}{\theta^4 \sin \theta \tan \theta}$$

분자를 유리화하면

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}}{\theta^4} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2 \tan \theta (\tan \theta - \sin \theta) - \tan^2 \theta \sin^2 \theta}{\theta^4 \sin \theta \tan \theta (\sqrt{1 + 2 \tan^2 \theta} + \tan \theta \sin \theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(\sec \theta - 1) - \tan \theta \sin \theta}{2\theta^4} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{2\theta^4 \cos \theta} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

이다.

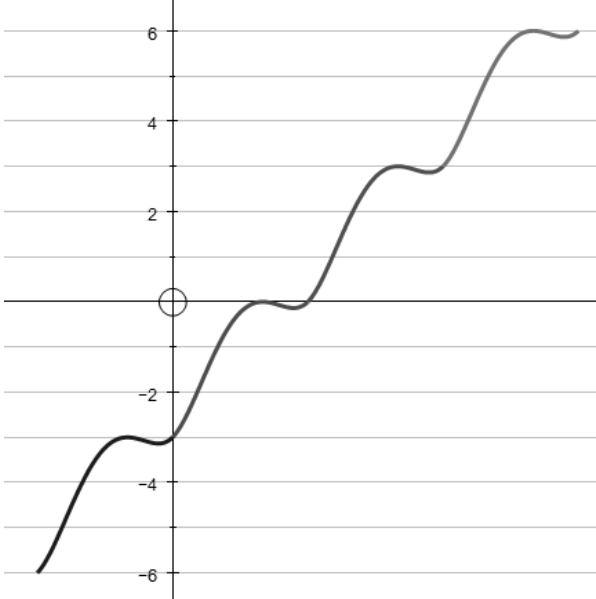
34.
 $\angle BAC = 90^\circ - 2\theta$ 이고 $\angle ADB = 90^\circ - \theta$ 이므로 삼각형 ABD는 이등변삼각형이다.
그러므로 $\overline{AD} = 2 \sin \theta$ 이다.

한편 $\overline{BD} = 1$ 이므로 $\overline{DE} = \cos \theta$ 이다.
 $3\overline{AD} + 8\overline{DE} = 6 \sin \theta + 8 \cos \theta$ 에서 미분하면 $6 \cos \theta - 8 \sin \theta$ 이고,
 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ (단, θ 는 예각)인 지점에서 최댓값을 가진다.

따라서 $6 \sin \theta + 8 \cos \theta = 6 \times \frac{3}{5} + 8 \times \frac{4}{5} = 10$ 이다.

35.
 $f(x) = \frac{1}{4}(x - 3)(x^3 + ax^2 + b)$ 이므로 $f(3) = 0$ 이다.
 $f(3) = f(0) + 3$ 이므로 $f(0) = -3$ 이다. 따라서 $b = 4$ 이다.
또한 $f(x) = \frac{1}{4}(x - 3)(x^3 + ax^2 + 4)$ 에서 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 3-} f'(x)$ 이어야

한다. 즉 $1 = \frac{27}{4} + \frac{9}{4}a + 1$ 가 성립해야 한다. 따라서 $a = -3$ 이다.
따라서, $f(x)$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.
(미분을 통해 $0 \leq x < 3$ 의 범위에서 그래프를 그린 후 평행이동하여 전체 범위의 그래프를 그릴 수 있다.)



$\{f'(t) | f(t) = f'(t)(t - 3), -30 \leq t \leq 30\}$ 이란 $(3, 0)$ 에서 그을 수 있는 접선의 개수를 의미한다.
먼저, $f(x)$ 의 그래프가 $(3, 0)$ 을 지나므로 그 점 위에서의 접선의 방정식은 $y = x - 3$ 이다. 그리고 이 접선은 곡선 $y = f(x)$ 의 $x = \dots, 0, 3, 6, \dots$ 에서의 접선의 방정식임을 알 수 있다.

정답 및 해설

$0 < x < 3$ 인 부분만 살펴보자.

$0 < x < 3$ 에서 $f(x)$ 의 변곡점들을 구해보면,

$$f''(x) = \frac{3}{2}(2x^2 - 6x + 3) \text{이므로 } x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \text{에서 변곡점을 갖는다.}$$

따라서 $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ 에서 $f(x)$ 가 위로 볼록이므로

이 지점에서의 접선이 $(3, 0)$ 을 지나는 경우는 유일하게 존재할 것이다.

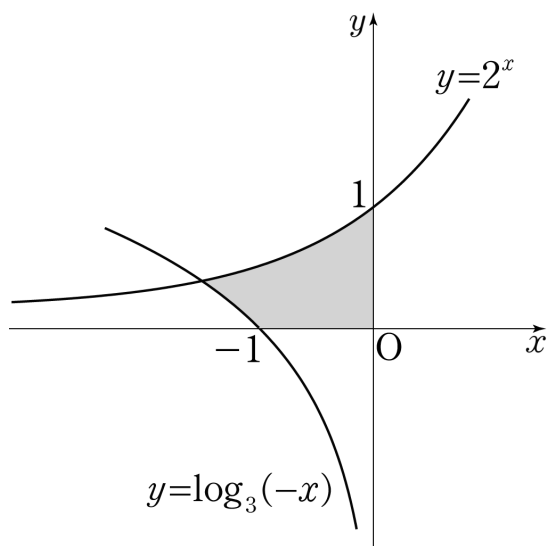
$(0 < x \leq \frac{3 - \sqrt{3}}{2})$ 인 점에서는 접선이 $(3, \text{양수})$ 을 지날 것이고,

$\frac{3 + \sqrt{3}}{2} \leq x < 3$ 인 점에서는 접선이 $(3, \text{음수})$ 를 지날 것이다.)

마찬가지로, $\dots, -3 < x < 0, 3 < x < 6, 6 < x < 9, \dots$ 에서 각각 하나씩 접선이 있을 것이다.

그러므로, 원소의 개수는 21개다.

36.



그림은 $n=5$ 인 상황이다.

$n=5$ 일 때를 기점으로 $n \leq 4$ 인 지점에서는 두 점근선의 교점이 제 3사분면에서 생기고 $n > 5$ 인 지점에서는 제 1사분면에서 생긴다.

1) $n=5$ 인 경우

$y=2^x+n-5$ 의 점근선은 $y=0$ 이고, $y=\log_3(-x+n-5)$ 의 점근선은 $x=0$ 이므로 점근선과 곡선으로 이루어진 영역에 x 좌표와 y 좌표가 모두 양수인 점은 경계에만 존재한다.

$(-1, 0), (0, 1), (0, 0)$ 으로 세 개다.

2) $n < 5$ 인 경우

$y=2^x+n-5$ 는 점근선과 함께 아래로 이동하고,

$y=\log_3(-x+n-5)$ 는 점근선과 함께 왼쪽으로 평행이동된다.

이때 $n=5$ 일 때에 비해 영역의 넓이가 축소되면서 길이가 줄어들어 정수인 점은 점근선의 교점으로 유일하다.

따라서 a_1, a_2, a_3, a_4 는 1이다.

3) $n > 5$ 인 경우

이제 $n \geq 5$ 인 부분에서 좌표평면을 $x < 0$ 과 $x \geq 0$ 인 부분으로 분할하여 생각해보자.

$x < 0$ 인 부분에서 2^x 는 모두 유리수이므로 2^x+n-5 의 y 값의

정수부분은 변화하지 않으므로 $\log$ 그래프가 어디서 만나는지만 관찰하여 주면 된다. (즉 가로만 생각하면 된다.)

$x < 0$ 에서 $\log_3(-x+n-5)=n-5$, 이므로 $x=-\{3^{(n-5)}-(n-5)\}$

$x > 0$ 인 부분에서는 $\sum_{k=5}^n 2^{k-5}+1$ 이다. (즉, 세로만 생각하면 된다.)

따라서 $a_n = 3^{n-5}+2^{n-4}$ (단 $n \geq 5$) 이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = 4 + \sum_{n=5}^{10} 3^{n-5} + 2^{n-4} = 494$$

37.

$y=2^x$ 상에 존재하는 두 점 P, Q의 y 좌표가 양수이므로 x 좌표의 범위는 $0 \leq x \leq \log_2 50$ 이지만 자연수일 필요가 없다는 점을 생각하자.

구하고자 하는 것은 위 범위내의 점 P, Q를 임의로 잡았을 때 그 사이에 x 좌표가 정수인 점이 두 개만 있게 만들면 된다.

따라서 x 좌표가 정수인 두 점을 먼저 잡고 그에 해당하는 P, Q를 찾으면 된다.

1) P, Q사이에 x 좌표가 정수인 점이 0, 1인 경우

점 P는 반드시 $x=0$ 이어야 한다.

점 Q의 x 좌표의 범위는 $1 \leq x_Q < 2$ 이다.

따라서 P, Q의 y 좌표의 순서쌍의 개수는 $1 \times (2^2 - 2^1) \times 2$ 개이다.

2) P, Q사이에 x 좌표가 정수인 점이 1, 2인 경우

점 P의 x 좌표의 범위는 $0 < x_P \leq 1$ 이다.

점 Q의 x 좌표의 범위는 $2 \leq x_Q < 3$ 이다.

따라서 P, Q의 y 좌표의 순서쌍의 개수는

$$(2^1 - 2^0) \times (2^3 - 2^2) \times 2 \text{개이다.}$$

이를 일반화 해보면

두 점 P, Q 사이에 x 좌표가 정수인 점이 $n, n+1$ 이라면

점 P의 x 좌표의 범위는 $n-1 < x_P \leq n$ 이다.

점 Q의 x 좌표의 범위는 $n+1 \leq x_Q < n+2$ 이다.

이를 만족시키는 y 좌표는 $2^{n-1} < y_P \leq 2^n$, $2^{n+1} \leq y_Q < 2^{n+2}$

이므로 y 좌표의 순서쌍의 개수는

$$(2^n - 2^{n-1}) \times (2^{n+2} - 2^{n+1}) \times 2 = 4^n \times 2 \text{이 된다.}$$

그러나 이는 어디까지나 x 좌표가 만드는 각 구간에 제약이 없는 경우이고 본 문제의 경우 x 좌표가 $\log_2 50$ 까지이므로 두 점 P, Q사이의 x 좌표가 정수인 점이 0, 1인 경우와 4, 5인 경우에 문제가 생긴다.

전자는 점 P의 x 좌표에서 문제가 발생하고 후자는 점 Q에서 문제가 발생한다. 따라서 두 경우만 주의해주면 된다.

3) P, Q사이에 x 좌표가 정수인 점이 4, 5인 경우

점 P의 x 좌표의 범위는 $3 < x_P \leq 4$ 이다.

점 Q의 x 좌표의 범위는 $5 \leq x_Q \leq \log_2 50$ 이다.

따라서 (P, Q)의 y 좌표의 순서쌍의 개수는

$$(2^4 - 2^3) \times (50 - 2^5 + 1) \times 2 \text{개이다.}$$

$$2 \cdot (2 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + (2^4 - 2^3) \times (50 - 2^5 + 1))$$

$$= 2 \cdot (2 + 4 + 16 + 64 + 152) = 476 \text{이다.}$$

정답 및 해설

38.

$$N=31 \text{ 일 때 } , 125.2=k+1.6 \quad \therefore k=123.6$$

$$\text{경도가 } 134.1^\circ \text{ 일 때, } 134.1=k+(1.6)^{a-30}$$

$$(1.6)^{a-30}=10.5$$

양변에 상용로그를 취하면

$$(a-30)\log 1.6=\log 10.5$$

$$0.204(a-30)=1.02 \quad \therefore a=35$$

$$(\log 1.6=\log 16-1=4\log 2-1)$$

39. 문제에서 주어진 조건 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^5}=0$ 는 $f(x)$ 가 사차 이하의

다항함수임을 의미한다.

ㄱ. $f(0)=0, f(1)=0$ 이면 $f'(c_1)=0$ 인 c_1 이 구간 $(0, 1)$ 에 적어도

하나 존재한다. 또, $f(1)=0, f(2)=0$ 이면 $f'(c_2)=0$ 인 c_2 가

$(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서, $f'(c_1)=0$ 과 $f'(c_2)=0$ 에 대하여 $f''(c_3)=0$ 인 c_3 가 구간

(c_1, c_2) 에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄴ. $f(0)=0, f''(9)=0, f(2)=0, f''(2)=0$ 이다.

따라서, $f''(x)=kx(x-2)=kx^2-2kx$ 이다.

$f(x)$ 가 사차 이하의 다항함수이므로 $f''(x)$ 는 이차 이하의 다항함수

$$f'(x)=\frac{1}{3}kx^3-kx^2+a \text{ 이고, } f(x)=\frac{1}{12}kx^4-\frac{1}{3}kx^3+ax+b \text{ 라}$$

하자.

$$f(0)=0 \text{ 에서 } b=0 \text{ 이고, } f(2)=0 \text{ 에서 } -\frac{4}{3}k+2a+b=0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서, } a=\frac{2}{3}k \text{ 이다. } f(x)=\frac{1}{12}kx^4-\frac{1}{3}kx^3+\frac{2}{3}x \text{ 을 인수분해하면,}$$

$$f(x)=\frac{1}{12}kx(x-2)(x^2-2x-4) \text{ 이다. 방정식 } x^2-2x-4=0 \text{ 의 해는}$$

$$x=1+\sqrt{5} \text{ 도 포함하고 있다. (참)}$$

$$\text{ㄷ. } A=\{0, 1, 2\} \text{ 이므로 } \neg \text{에서 } B \neq \emptyset \text{ 이다.}$$

또, $f''(x)$ 가 이차 이하의 다항함수이므로 집합 B 의 원소의 개수는 2개 이하이다.

(i) B 의 원소의 개수가 2개인 경우

ㄴ에서 교집합의 원소의 개수가 2개이면 모순임을 알 수 있다.

(ii) B 의 원소의 개수가 1개인 경우

$$f(1)=0, f(2)=0, f(0)=0 \text{ 이다. 따라서,}$$

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(ax+b)=(x^3-3x^2+2x)(ax+b) \text{ 꼴이다.}$$

$$f'(x)=(3x^2-6x+2)(ax+b)+a(x^3-3x^2+2x) \text{ 이고,}$$

$$f''(x)=(6x-6)(ax+b)+2a(3x^2-6x+2) \text{ 이다.}$$

$$f''(0)=4a-6b \text{ 이므로, } f''(0)=0 \text{ 이면 집합}$$

$$f(x)=ax(x-1)(x-2)\left(ax+\frac{2}{3}a\right) \text{ 이므로 } -\frac{2}{3} \in A \text{ 이다. (모순)}$$

$$\text{마찬가지로, } f''(2)=16a+6b \text{ 이므로 모순이다.}$$

$$f''(1)=-2a=0 \text{ 이면 } a=0 \text{ 이다. } b \neq 0 \text{ 이면 주어진 조건을 모두 만족시킨다. 그리고 이때 변곡점을 갖는다. (참)}$$

40.

t_1 초 사용 후

$$25-5=a^{-3t_1}(85-5)$$

t_1+t_2 초 사용 후

$$7.5-5=a^{-3(t_1+t_2)}(85-5)$$

$$\text{두 식을 나누어 주면 } \frac{1}{8}=a^{-3t_2} \quad \frac{1}{4}=a^{-3t_1} \text{ 이므로 양변에 밑이 } a \text{ 인}$$

$$\text{로그를 취하면 } -3t_1=\log_a \frac{1}{4}, -3t_2=\log_a \frac{1}{8} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서, } \frac{t_2}{t_1}=\frac{\log_a \frac{1}{8}}{\log_a \frac{1}{4}}=\frac{3}{2} \text{ 임을 알 수 있다.}$$

41. 최고차항의 계수가 1인 두 사차함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 함수

$f(x)-g(x)$ 는 3차이하의 다항함수이다. 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 근이

0과 3이므로 $f(x)-g(x)=kx^2(x-3)$ 혹은

$f(x)-g(x)=kx(x-3)^2$ 혹은 $f(x)-g(x)=kx(x-3)$ 이다.

$$\int_0^4 xf'(x)dx=-\int_0^4 xg'(x)dx=1 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^4 xf'(x)-xg'(x)dx=\left[x\{f(x)-g(x)\}\right]_0^4-\int_0^4 f(x)-g(x)dx=2$$

이다.

$$\text{그런데 } 0 < f(4)-g(4) < \frac{1}{2},$$

$$\int_0^4 f(x)-g(x)dx=\left[x\{f(x)-g(x)\}\right]_0^4-2 \text{ 이므로}$$

$$-2 < \int_0^4 f(x)-g(x)dx < 0 \text{ 이다.}$$

위에서 분류한 세 가지 케이스를 모두 조건에 맞는지 확인해보면

$f(x)-g(x)=kx^2(x-3)$ 인 경우와 $f(x)-g(x)=kx(x-3)^2$ 인 경우는

$$0 < f(4)-g(4) < \frac{1}{2}, -2 < \int_0^4 f(x)-g(x)dx < 0 \text{ 을 동시에}$$

만족시키지 못하고, $f(x)-g(x)=kx(x-3)$ 인 경우에는 동시에 만족시킨다는 것을 알 수 있다.

$$\text{따라서 } \int_0^4 f(x)-g(x)dx=\left[x\{f(x)-g(x)\}\right]_0^4-2 \text{ 을 이용하여}$$

$$\text{계산하면 } -\frac{8}{3}k=16k-2, k=\frac{3}{28} \text{ 이다. 따라서 두 곡선 } y=f(x) \text{ 와}$$

$y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 |f(x)-g(x)|dx=\int_0^3 \frac{3}{28}x(3-x)dx=\frac{27}{56}$$

42. 두 원의 접점을 P라 하고 점 P에서의 접선이 x 축과 만나는

교점을 Q라 하자. 이때 생기는 직각삼각형들을 관찰하면

$$\overline{OQ}=\frac{1}{\cos \theta} \text{ 이고 } \overline{PQ}=\overline{QH}=\tan \theta \text{ 임을 알 수 있다.}$$

$$\text{따라서 } \overline{AH}=\frac{1}{\cos \theta}+\tan \theta-1 \text{ 이고, } \overline{O'H}=\tan \theta \times \left(\frac{1}{\cos \theta}+\tan \theta\right) \text{ 이다.}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{O'H}-\overline{AH}}{\theta^2}=\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\tan^2 \theta+\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}-\frac{1}{\cos \theta}-\tan \theta+1}{\theta^2}$$

$$=1+\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\tan \theta \frac{1-\cos \theta}{\cos \theta}+\frac{\cos \theta-1}{\cos \theta}}{\theta^2}=\frac{1}{2} \quad \text{따라서 } 100a=50$$

정답 및 해설

43. $(x-n)(2^x-k) < 0$ 은 $(x-n)(x-\log_2 k) < 0$ 와 동치이다.
따라서 $\log_2 k < n$ 인 경우와 아닌 경우로 나누어 풀자.

첫째로 $\log_2 k < n$ 인 경우 $\log_2 k < x < n$ 가 부등식의 해이다.
 $\log_2 k > n$ 인 경우 $n < x < \log_2 k$ 가 부등식의 해이다.

$n=1$ 일 때, $\log_2 k < x < 1$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수는 0이고,
 $1 < x < \log_2 k$ 를 만족시키는 자연수 x 의 개수가 1이 되게 하는
자연수 k 는 $k=5, 6, 7, 8$ 이다.

$n=2$ 일 때, $\log_2 k < x < 2$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 1이
되게 하는 자연수 k 는 $k=1$ 이다.
 $2 < x < \log_2 k$ 를 만족시키는 자연수 x 의 개수가 1이 되게 하는
자연수 k 는 $k=9, 10, \dots, 16$ 이다.

$n=3$ 일 때, $\log_2 k < x < 3$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 1이
되게 하는 자연수 k 는 $k=2, 3$ 이다.
 $3 < x < \log_2 k$ 를 만족시키는 자연수 x 의 개수가 1이 되게 하는
자연수 k 는 $k=17, 18, \dots, 32$ 이다.

$n=4$ 일 때, $\log_2 k < x < 4$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 1이
되게 하는 자연수 k 는 $k=4, 5, 6, 7$ 이다.
 $4 < x < \log_2 k$ 를 만족시키는 자연수 x 의 개수가 1이 되게 하는
자연수 k 는 $k=33, 34, \dots, 64$ 이다.

$a_n = (2^{n+2} - 2^{n+1}) + (2^{n-1} - 2^{n-2}) = 2^{n+1} + 2^{n-2}$ ($n \geq 2$)임을
부등식 $(x-n)(x-\log_2 k) < 0$ 을 보고 나열하지 않고도 알 수 있는
경지에 오르도록 하자. $\therefore \sum_{n=1}^6 a_n = \frac{4(2^6-1)}{2-1} + \frac{1(2^5-1)}{2-1} = 283$

44. $\neg$. $f(x) = x^{\ln x}$ 에서 $x = e^{\ln x}$ 이므로 $f(x) = e^{(\ln x)^2}$ 이다.
따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ (참)

$\sqcup$. $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} e^{(\ln x)^2}$ 이고 $f'(1) = 0$ 이고 $x=1$ 좌우에서
부호변화가 $-$ 에서 $+$ 로 바뀌므로 $x=1$ 에서 극솟값 1을 가진다.
($f'(1)=0$, $f''(1) > 0$ 이므로 $x=1$ 에서 극솟값 1을 가진다고 해도
좋다.) (참)

$\sqsubset$. $f''(x) = \frac{4(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2}{x^2} e^{(\ln x)^2} > 0$ 이므로 변곡점이 존재하지
않는다. (거짓)

[참고] $\ln f(x) = \ln x \times \ln x$ 임을 이용하여 $f(x) = e^{(\ln x)^2}$ 임을 알 수도
있다. $x = e^{\ln x}$ 인 것을 증명하는 방법과 동일하기 때문이다.

45. $\cos x = t$ 로 치환하면 (준식) $= \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{2}{t^3} dt = \left[\frac{1}{t^2} \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

46. $\frac{2}{3} = \frac{1}{\cos x + 2}$ 의 해는 $2 \cos x = -1$ 이므로 $x = \frac{2}{3}\pi$ 이다.

우리가 구하고자 하는 답은 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \left| \frac{1}{\cos x + 2} - \frac{2}{3} \right| dx$ 이다.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{에서 } \frac{1}{\cos x + 2} \leq \frac{2}{3} \text{이므로} \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \left| \frac{1}{\cos x + 2} - \frac{2}{3} \right| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\cos x + 2} \right) dx \\ = \frac{\pi}{9} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{-\sin x + 2} dx \end{aligned}$$

이다. 따라서, $\beta = \frac{\pi}{9}$ 이다.

47. $f'(x) = x + \frac{1}{x} - a$ 이다.

(i) $a > 2$ 일 때
서로 다른 두 실근 α, β 를 갖는다.



도함수는 모두 양의 근을 가지며, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로, $|f(x)|$ 는 미분가능하지 않은 점이 반드시
존재한다.

(ii) $a=2$ 일 때
 $x=1$ 을 근으로 갖는다. 따라서, $f'(1)=0$ 이다.
 $f(x)$ 는 양수 전체의 집합에서 증가한다. $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로, $f(x)=0$ 을 만족시키는 x 가 하나 존재한다.

$f(k)=0$ 이라 하면, $x=k$ 에서 $f(x)$ 의 부호가 바뀌므로, 그
지점에서만 $|f(x)|$ 의 미분가능성을 판단하면 된다.

$$\lim_{x \rightarrow k+0} \frac{|f(x)| - |f(k)|}{x-k} = \lim_{x \rightarrow k+0} \frac{f(x) - f(k)}{x-k} = f'(k) \text{ 이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow k-0} \frac{|f(x)| - |f(k)|}{x-k} = \lim_{x \rightarrow k-0} \frac{-f(x) + f(k)}{x-k} = -f'(k)$$

이다. 따라서, $f'(k) = -f'(k)$ 이기 위해선 $f'(k)=0$ 이어야 한다.
따라서, $k=1$ 이다. 그러므로, $f(1)=0$ 이다.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + b + \ln x$ 에서 $f(1)=0$ 이므로 $b = \frac{3}{2}$ 이다. 따라서
 $12(a+b) = 42$ 이다.

(iii) $-2 < a < 2$ 일 때
근을 갖지 않는다. 따라서, 전구간 증가하지만, $f'(k)=0$ 이 되는
 k 가 존재하지 않는다. (모순)

(iv) $a \leq -2$ 일 때
 $f'(x)=0$ 이 음의 근을 갖는다. 따라서, 전구간 증가하며
 $f'(k)=0$ 이 되는 k 가 존재하지 않는다. (모순)

48.
 $f'(x) = 3 \cos x + \sqrt{7} \sin x$ 이다. 따라서, $f'(x)=0$ 인 x 는
 $\tan x = -\frac{3}{\sqrt{7}}$ 을 만족한다.

정답 및 해설

따라서, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ 인 x 에서 해가 각각 하나씩 있고,
그 해를 α , β 라 하자.

그러면 $x = \alpha$ 에서는 극대이고, $x = \beta$ 에서는 극소이다.

한편 $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{7}}$ 에서 $\sec^2 \alpha = \frac{16}{7}$ 이므로, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$,

$\sin \alpha = \frac{3}{4}$ 이다.

따라서, $M = 6$ 이고 $16\sin^2 \alpha = 9$ 이다.

49.

(가) $f(x) = (\ln x)^n + nx$ 를 미분하면, $f'(x) = n\frac{(\ln x)^{n-1}}{x} + n$ 이므로

$f'(x) = n\left\{\frac{(\ln x)^{n-1}}{x} + 1\right\}$ 이다.

n 이 홀수이면, $\frac{(\ln x)^{n-1}}{x} + 1$ 이 항상 양수이다.

따라서, 극값이 존재하지 않는다.

그러나 n 이 짝수이면, $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) < 0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) > 0$ 이기

때문에, 부호가 바뀌는 지점이 반드시 존재한다.

(나) $f'(x) = n\frac{(\ln x)^{n-1}}{x} + n$ 에서 한번 더 미분하면,

$$\begin{aligned} f''(x) &= n(n-1)(\ln x)^{n-2} \frac{1}{x^2} - n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x^2} \\ &= n(\ln x)^{n-2} \frac{1}{x^2} \{(n-1) - \ln x\} \end{aligned}$$

이다. 이 값이 0이 되기 위해서는, $x = 1$ 또는 $x = e^{n-1}$ 이다.

n 이 홀수이면, $x = 1$ 에서 변곡점을 갖고, $x = e^{n-1}$ 에서도 변곡점을

갖는다. 반면, n 이 짝수이면 $x = e^{n-1}$ 에서만 변곡점을 갖는다.

그래서, 변곡점이 e^{10} 보다 작기 위해서는, $e^{n-1} < e^{10}$ 이어야 한다.

따라서, $n < 11$ 이다.

(가)와 (나)를 모두 만족시키는 n 의 값은 2, 4, 6, 8, 10이고,

모두 합하면 30이다.

50.

$\overline{CD} = x$ 라 하자.

$\overline{OC} = \overline{OH} + \overline{HC} = \cos \theta + x \sin \theta$, $\overline{CP} = x \cos \theta$ 이다.

따라서, $\overline{OP}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CP}^2 = 1$ 이므로

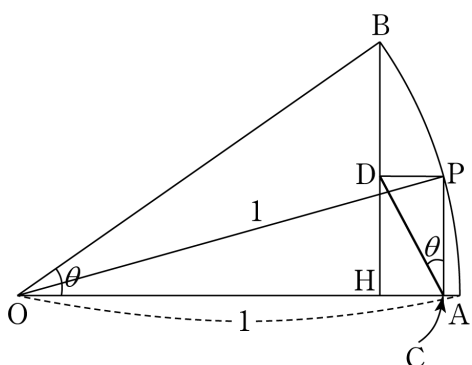
$x^2 + 2\sin \theta \cos \theta x + \cos^2 \theta - 1 = 0$ 이다.

따라서, $x^2 + 2\sin \theta \cos \theta x - \sin^2 \theta = 0$ 이다.

$x = -\sin \theta \cos \theta \pm \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$ 이다.

따라서, $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{CD}}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{-\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta + 1}}{\theta} = \sqrt{2} - 1$

이다. 따라서, 이 답은 9이다.



51.

$\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$ 에서 $x^2 = t$ 로 치환하자.

$x = \sqrt{t}$ 이므로 $\int_1^4 \frac{f(t)}{2t} dt = \int_1^2 \frac{1}{t} dt + \int_2^4 \frac{4-t}{2t} dt = 3\ln 2 - 1$

따라서, 답은 29이다.

52.

$\tan \angle ABQ = \frac{6}{2\sqrt{7}}$, $\tan \angle ABP = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

$\tan(\angle ABQ - \angle ABP) = \frac{\frac{8}{3\sqrt{7}}}{1 + \frac{1}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

53.

$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \left[-f(x) \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx$ 이고,

$\int_0^\pi f''(x) \sin x dx = \left[f'(x) \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \cos x dx$ 이다.

두 등식을 더하면,

$\int_0^\pi \{f(x) + f''(x)\} \sin x dx = f(\pi) + f(0) = \frac{\pi^3}{2}$ 이다.

54.

먼저 주어진 문제에서 구하려는 식을 치환해보자.

$\int_{\frac{1}{2}}^1 g\left(\frac{1}{x}\right) dx$, $\frac{1}{x} = t$ 로 치환을 하면 $\int_1^2 \frac{g(x)}{x^2} dx$ 이 된다.

다음으로, $g(x) = xf(x) - \int_0^x f(t) dt$ 에서 $f(x)$ 의 부정적분을 $F(x)$ 라

하면 $g(x) = xf(x) - (F(x) - F(0))$ 이고 이를 $\int_1^2 \frac{g(x)}{x^2} dx$ 에 대입하자

$\int_1^2 \frac{g(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \left\{ \frac{f(x)}{x} - \frac{F(x) - F(0)}{x^2} \right\} dx = \int_1^2 \left(\frac{F(x) - F(0)}{x} \right)' dx$
 $= \left[\frac{F(x) - F(0)}{x} \right]_1^2 = \frac{F(2) - F(0)}{2} - (F(1) - F(0))$ 이다.

$x = 1$, $x = 2$ 에서 함수 $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 가 극값을 갖게 되므로 도함수의

값이 0이 된다.

$\frac{d}{dx} \frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} = \frac{2f(x)f'(x)g(x) - g'(x)\{f(x)\}^2}{\{g(x)\}^2} = 0$

$2f(x)f'(x)g(x) - g'(x)\{f(x)\}^2 = 0$

또한, $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 가 $x = 1$, $x = 2$ 각각 1, 4의 극값을 가지므로

$f(1), f(2) \neq 0$ 이고 문제의 조건에서도 $f'(x) > 0$ 이다.

따라서 $2f(x)f'(x)g(x) - g'(x)\{f(x)\}^2 = 0$ 는

$2f'(x)g(x) = g'(x)f(x)$ 가 된다.

$g(x) = xf(x) - \int_0^x f(t) dt$ 이고, $g'(x) = xf'(x)$ 이므로 이를 위에서

구한 식에 대입해보자.

$2f'(x) \left(xf(x) - \int_0^x f(t) dt \right) = xf'(x)f(x)$

정답 및 해설

$xf(x) = 2 \int_0^x f(t) dt$ 가 성립한다.

결국 구하고자 하는 값은 $\frac{F(2)-F(0)}{2} - (F(1)-F(0))$ 이고 알고 있는

것은 $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 이 $x=1, 2$ 일 때의 값이므로 $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 에

$xf(x) = 2 \int_0^x f(t) dt$ 를 대입해보자.

$$\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} = \frac{\left(\frac{2 \int_0^x f(t) dt}{x}\right)^2}{xf(x) - \int_0^x f(t) dt} = \frac{\left(\frac{2 \int_0^x f(t) dt}{x}\right)^2}{\int_0^x f(t) dt} = \frac{4 \int_0^x f(t) dt}{x^2}$$

($xf(x) = 2 \int_0^x f(t) dt$ 임을 이용)

$$\frac{\{f(1)\}^2}{g(1)} = 4 \int_0^1 f(t) dt = 4(F(1) - F(0)) = 1$$

$$\frac{\{f(2)\}^2}{g(2)} = \frac{4 \int_0^2 f(t) dt}{4} = (F(2) - F(0)) = 4$$

따라서

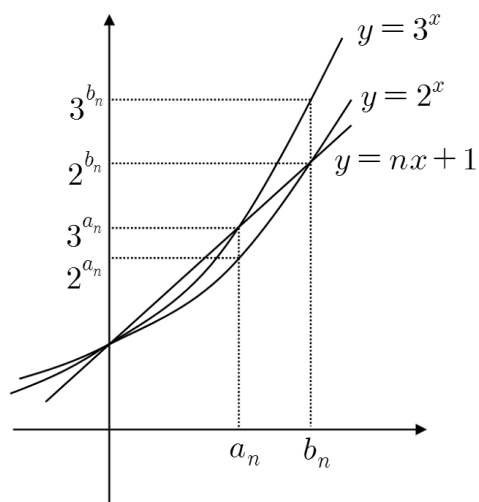
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 g\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \frac{g(x)}{x^2} dx = \frac{F(2)-F(0)}{2} - F(1) - F(0) = -\frac{7}{4} \text{ 이다.}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 g\left(\frac{1}{x}\right) dx = k = \frac{7}{4} \text{ 이고 } 60k = 105 \text{ 이다.}$$

55.

ㄱ. $y=2x+1$ 는 $(2, 5), (3, 7)$ 을 지나고, $y=2^x$ 는 $(2, 4), (3, 8)$ 을 지나므로 $2 < b_2 < 3$ 이다. (참)

ㄴ. $a_{n+1} > a_n$ 이고, $3 > 2$ 이므로 $3^{a_{n+1}} - 3^{a_n} > 2^{a_{n+1}} - 2^{a_n}$ 이다. (참)



ㄷ. $n(b_n - a_n) = (nb_n + 1) - (na_n + 1) = 2^{b_n} - 3^{a_n}$ 이다.

좌표평면 상에 표시해보면 $2^{b_n} - 3^{a_n} < 2^{b_n} - 2^{a_n} < 3^{b_n} - 3^{a_n}$ 임을 알 수 있다. (거짓)

56.

선분 OP의 길이는 1이고, 선분 OQ가 각 θ 를 이등분하므로, 선분 PQ의 길이는 $\tan \frac{\theta}{2}$ 이다. $\angle POQ = \angle PQR = \frac{\theta}{2}$ 이므로,

선분 PR의 길이는 $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ 이다. 따라서 $f(\theta) = \tan^4 \frac{\theta}{2} \pi$ 이다.

한편, 선분 AQ의 길이는 $\tan \frac{\theta}{2}$ 이다. $\angle AOQ = \angle AQS = \frac{\theta}{2}$ 이므로,

선분 AS의 길이는 $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ 이다.

따라서 $g(\theta) = \frac{1}{2} \tan^3 \frac{\theta}{2}$ 이다. 그러므로, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta \times g(\theta)} = \pi$ 이다.

57.

국어, 수학, 영어, 사회탐구영역을 모두 공부하면서 5시간을 공부해야 하므로 두 시간을 공부할 과목을 고르는 경우의 수는 4가지이다.

두 시간 공부하는 과목을 A라 하면 한 시간마다 과목을 바꿔서 모든 과목을 공부하게 되므로 AABCD를 같은 것이 이웃하지 않게 나열하면 된다.

따라서 AABCD를 같은 것을 포함한 순열에서 AA가 이웃한 경우를 빼주면 된다.

따라서, $4 \times \left(\frac{5!}{2!} - 4!\right) = 144$ 이다.

4!이 되는 이유는 AA가 같은 것이기 때문에 하나로 묶어서 볼 수 있기 때문이다.

58.

반드시 두 대륙은 두 나라를 모두 여행하게 되므로 한 대륙에서 한 나라만 여행하는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$ 가지이다.

같은 대륙에 있는 나라는 연속해서 여행하게 되므로 여행할 대륙의 순서를 정하고 나라의 순서를 정해주면 된다.

대륙의 순서를 정하고 연속하여 여행하는 경우의 수 : $3! \times 2 \times 2$
따라서 전체 경우의 수는 $6 \times 3! \times 2 \times 2 = 144$

59.

첫째, 둘째, 셋째 글자 모두 ‘현’ 이 존재하므로 첫째 글자가 ‘현’ 이 아닌 경우와 ‘현’ 인 경우로 나눠보자

1) 첫째 글자가 ‘현’ 이 아닌 경우

첫째 자리에 올 수 있는 경우의 수 : 3 가지

둘째 자리에 올 수 있는 경우의 수 : 4 가지

셋째 자리에 올 수 있는 경우의 수 : 3 가지

둘째 자리와 셋째 자리에 있는 글자는 동일하므로 셋째 자리에 오는 글자는 둘째 자리에서 고른 글자만 빼면 된다.

단, 문제 조건에서 ‘민’ ‘수’ 가 연속되어 나오면 안된다.

따라서 ‘민’ ‘수’ 가 연속으로 나오는 경우는 3가지이므로 이를 빼주면 된다.

따라서 $3 \times 4 \times 3 - 3 = 33$ 가지이다.

2) 첫째 글자가 ‘현’ 인 경우

두 번째와 세 번째 글자에는 ‘현’ 이 올 수 없다.

둘째 자리에 올 수 있는 경우의 수 : 3가지

셋째 자리에 올 수 있는 경우의 수 : 2가지

그런데 여기서도 ‘민’ ‘수’ 가 연속되어 나오는 경우가 1가지 존재한다.

따라서 $3 \times 2 - 1 = 5$ 가지이다.

따라서 전체 경우의 수는 38 가지이다.

정답 및 해설

60.
세 과목군에서 4과목을 선택하는 경우는
(지리, 역사, 일반사회) : (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)이다.

1) 과목군에서 (2,1,1)의 형태로 고르는 경우
역사 과목군에서는 한 과목 밖에 선택하지 못하므로 국사를 고를 수 없다.
지리 과목군에서 고르는 경우의 수 : ${}_3C_2$ 가지
역사 과목군에서 고르는 경우의 수 : 2 가지
일반사회 과목군에서 고르는 경우의 수 : 5가지

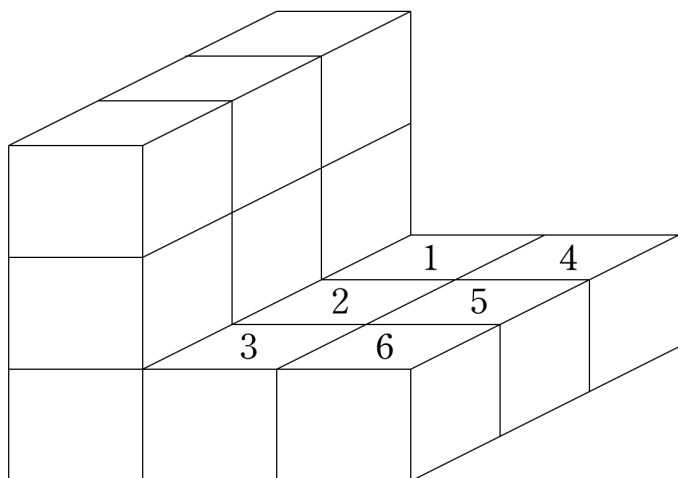
따라서 (2,1,1)의 형태로 고르는 경우의 수는 $3 \times 2 \times 5 = 30$ 가지이다.

2) 과목군에서 (1,2,1)의 형태로 고르는 경우
역사과목군에서 국사를 고르는 경우와 고르지 않는 경우로 나눌 수 있다.
2-1) 국사를 고르는 경우
국사를 고르면 반드시 한국 근현대사도 골라야 하므로 역사 과목군에서 고르는 경우의 수는 1가지이다.
경우의 수 : $3 \times 1 \times 5$ 가지이다.
2-2) 국사를 고르지 않는 경우
국사를 고르지 않아도 역사과목군에서 두과목을 고르는 경우는 세계사와 한국 근현대사를 고르는 경우 한가지 뿐이므로 위와 동일하다.
경우의 수 : $3 \times 1 \times 5$ 가지

3) 과목군에서 (1,1,2)를 선택하는 경우
지리 과목군에서 고르는 경우의 수 : 3 가지
역사 과목군에서 고르는 경우의 수 : 2 가지
일반사회 과목군에서 고르는 경우의 수 : ${}_5C_2$ 가지
경우의 수 : $3 \times 2 \times 10 = 60$ 가지

따라서 전체 경우의 수는 $30 + 15 + 15 + 60 = 120$ 가지이다.

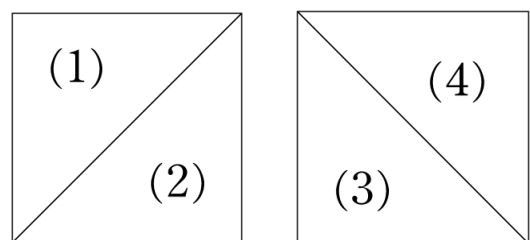
61.
앞, 위, 옆에서 본 모양을 맨 아래층과 맨 왼쪽줄은 3×3 으로 짝차있음을 알 수 있다.



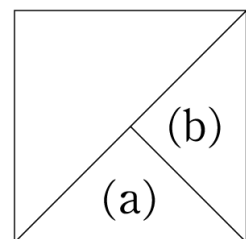
위의 그림은 위에서 본 모양과 옆에서 본 모양을 만족한다. 앞에서 본 모양을 만족시키기 위해서 (1,2,3)을 2열, 3열을 (4,5,6) 이라고 하면 2열과 3열 중 각각 한 칸은 반드시 현재씩 더 쌓여야 한다.

2열을 보면 1,2,3중 적어도 하나만 한 개가 더 쌓이면 되므로 $2^3 - 1$ 가지가 된다.
3열도 2열과 같이 적어도 한 칸에만 더 쌓이면 되므로 동일하게 여사건을 이용하면 $2^3 - 1$ 가지가 된다.
따라서 총 경우의 수는 $(2^3 - 1)(2^3 - 1) = 49$ 개다.

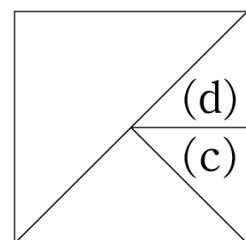
62.



빨간색을 칠하는 경우



검은색을 칠하는 경우



초록색과 파란색을 칠하는 경우

빨간색은 위의 그림처럼 칠할 수 있는 방법이 (1) (2) (3) (4) 네 가지이다.

빨간색을 칠한 경우 검은 색을 칠하는 경우는 (a) (b) 두 가지이다. 검은색까지 칠하면 초록색과 파란색을 칠하는 방법은 두 가지이다. 따라서 총 경우의 수는 $4 \times 2 \times 2! = 16$ 가지이다.

63.

전체 경우는 중복을 허락하여 5개중 3개를 뽑는 경우이다 : ${}_5H_3$
A가 나오지 않는 경우는 4개중에 중복하여 3개를 뽑는 경우이므로 ${}_4H_3$ 이다.

A가 한 개 이상 나오는 경우는 전체 경우에서 A가 하나도 나오지 않는 경우를 빼면 된다.

따라서 경우의 수는 ${}_5H_3 - {}_4H_3 = {}_7C_3 - {}_6C_3 = 15$ 이다.

64.

1) 철수와 영희가 10열에 앉는 경우 :

서로 자리를 바꿀 수 있으므로 $2 \times 3!$

2) 철수와 영희가 11열에 앉는 경우 :

(A,B) or (B,C)에 앉을 수 있고 자리를 바꿀 수 있으므로 $2 \times 2 \times 3!$

3) 전체 경우의 수 : 일렬로 세우는 것과 같으므로 5!

따라서 철수와 영희가 같은 열에 이웃하여 앉을 확률은

$$\frac{2 \times 3! + 2 \times 2 \times 3!}{5!} = \frac{3}{10} \text{ 이다.}$$

정답 및 해설

65.
C 회사의 시장점유율은 모비율과 같으므로 $p = \frac{1}{10}$ 이다.
- 표본비율($\hat{p}$)이 정규분포 $N\left(\frac{1}{10}, \left(\frac{1}{50}\right)^2\right)$ 을 따른다. 구하는 값은
- $$P\left(\hat{p} \geq \frac{27}{225}\right) \text{ 이므로 표준화하면 } P\left(\hat{p} \geq \frac{\frac{27}{225} - \frac{1}{10}}{\frac{1}{50}}\right) = P(z \geq 1) \text{ 이다.}$$
- 따라서 구하고자하는 확률은 $P(Z \geq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$ 이다.
66.
주어진 식의 ${}_nH_{7-n}$ 을 C로 변환해보면 ${}_6C_{7-n}$ 임을 알 수 있다.
- 즉, 주어진 식은 $\sum_{n=1}^7 {}_6C_{7-n} = 2^6$ 이다.
67.
 $x + y + z = -3$
 $-3 \leq x, y, z \leq 3$ x, y, z 의 범위가 동일하다.
- 모든 변수 x, y, z 에 3을 더해주면 음수에서 양수범위가 아닌 양수 범위에서만 계산이 가능하다. 문제는 다음과 같이 바뀐다.
 $(x+3) + (y+3) + (z+3) = 6, \quad 0 \leq x+3, y+3, z+3 \leq 6$
따라서 이는 $x' + y' + z' = 6$ 이므로 ${}_3H_6 = 28$ 이다.
68.
회전을 고려하지 않고 칠하는 경우의 수는 $4!$ 가지이다.
그러나 회전을 하면 같은 경우가 한번 생기기 때문에 2쌍씩 묶을 수 있게 된다.
- 따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2} = 12$ 가지가 된다.
69.
10원짜리와 500원짜리는 문제가 없지만 50원 짜리 동전은 2개가 모이면 100원의 역할을 하기 때문에 문제를 해결함에 있어서 이 부분을 생각해 볼 수 있다.
- 만일 50원을 2개 골랐다면 100원이 되고 3개를 더 고를 수 있다. 이때 이 3개를 100원으로 모두 뽑아서 400원을 만들더라도 다른 방법으로 400원을 만들 수 없다. 즉 50원을 짝수 개 고르게 됨으로 만드는 금액은 다른 방법으로 만드는 금액과 중복되지 않는다는 점을 통해 단순한 중복순열로 만들 수 있다.
- 따라서 10원을 a , 50원을 b , 100원을 c , 500원을 d 라고 하면 $a + b + c + d = 5$ (단, $a, b, c, d \leq 4$)인 중복순열이 된다.
- 문제는 각 동전이 최대 4개인데 위 중복순열에서는 각 동전이 5인 경우가 나온다. 즉 중복순열 값인 ${}_4H_5$ 에서 각 동전이 5개가 되는 경우인 $(5, 0, 0, 0), (0, 5, 0, 0), (0, 0, 5, 0), (0, 0, 0, 5)$ 경우 4가지를 빼주면 된다.
- 따라서 만들 수 있는 금액의 경우의 수는 ${}_4H_5 - 4 = {}_8C_5 - 4 = 52$ 가지이다.
70.
어느 대학교 학생의 운전면허 소지자 : $\frac{5}{8}$
- 운전면허 소지자중 1종 면허 소지자 : $\frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$

- 192명을 임의 추출 했을 때 1종 면허를 소지하고 있는지는 이항분포 $B\left(192, \frac{1}{4}\right)$ 를 따른다.
- n 이 충분히 크기 때문에 이항분포를 정규분포로 근사하면 위의 이항분포는 $N(48, 6^2)$ 을 따른다.
- 구하고자하는 $P(X \leq 57)$ 를 표준정규분포로 바꾸어 풀면
- $$P(X \leq 57) = P\left(\frac{X-48}{6} \leq \frac{57-48}{6}\right) = P(Z \leq 1.5)$$
- $$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$
- $$= 0.5 + 0.4332 = 0.9332$$
- 이다.
71.
4의 배수가 되는 경우를 구하는 것은 중복되는 경우를 제외해야 하므로 여사건을 이용하여 4의 배수가 아닌 경우를 찾는 것이 더 좋다.
- 4의 배수 아닌 경우
- 1) 모두 홀수가 나오는 경우 : ${}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
- 2) 2 또는 6이 하나만 나오는 경우 : ${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$
- 따라서 4의 배수가 나오는 경우는 $1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{6}\right) = \frac{37}{48}$ 이다.
72.
먼저 문제에서 준 자료만으로 표를 만들면 다음과 같다.
- | | 중국어 | 일본어 | 합계 |
|----|--------------|--------|--------------|
| 물리 | (a) | 27 | ($27 + a$) |
| 화학 | ($64 - a$) | (9) | ($73 - a$) |
| 합계 | 64 | (36) | 100 |
- 이 학교에서 임의로 택한 학생이 물리 수업을 받는 사건(A)과 중국어를 받는 사건(B)이 독립이므로 $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ 를 만족시킨다.
- $$\frac{27+a}{100} \times \frac{64}{100} = \frac{a}{100}, \quad a = 48$$
- 이 학교의 학생 중 화학 수업을 받는 학생은 $73 - 48 = 25$ 명이다.
73.
집합 B 의 원소는 결국 집합 A 에서 가져온 원소들이므로 5개의 원소중 중복을 허락하여 3개를 뽑는 중복조합이 된다.
- 이때 2와 4는 $2 \times 2 = 1 \times 4$ 가 되기 때문에 $(2, 2, k)$ 를 뽑는 경우와 $(1, 4, k)$ 를 뽑는 경우는 결과적으로 B 에서 원소가 중복되게 된다.
- 따라서 ${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$ 이고 위의 중복되는 경우는 $k = 1, 2, 3, 4, 5$ 인 5가지 경우이므로 구하고자 하는 집합 B 의 원소의 개수는 $35 - 5 = 30$ 개다.
74.
다항식을 $\left(2x^2 - \frac{1}{4}\right)^8$ 의 계수를 표현하면 ${}_8C_k (2x^2)^{8-k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k$ 이다.
- 계수가 정수인 항을 구하기 위해 식을 변형하면 ${}_8C_k (x^2)^{8-k} (-1)^k (2)^{8-3k}$ 가 된다.

정답 및 해설

1) $k=0, 1, 2$ 인 경우
 $8-3k \geq 0$ 이므로 항상 정수이다.

2) $k=3$ 인 경우
식에 대입하고 계산을 해보면
 ${}_8C_3(-1)^3(2)^{-1}=-28$ 이므로 정수이다.

3) $k=4$ 인 경우
이항계수 식에 대입을 하면 ${}_8C_4(-1)^4(2)^{-4}$ 이다.
이 값이 정수가 되기 위해서는 ${}_8C_4$ 가 2^{-4} 을 상쇄시킬 수 있어야 한다. ${}_8C_4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ 인데 2^{-4} 을 상쇄시킬 수 없다.
따라서 $k=4$ 인 경우는 정수가 되지 않는다.

4) $k \geq 5$ 인 경우
 $k=5$ 이면 ${}_8C_5(-1)^5(2)^{-7}$ 이다.
이때 ${}_8C_k$ 의 최대값은 $k=4$ 일 때 이므로 ${}_8C_5$ 는 ${}_8C_4$ 보다 작아진다.
즉, $k \geq 5$ 에서는 ${}_8C_k$ 의 값이 점점 작아지는데 상쇄시켜야하는 값인 2^{8-k} 가 훨씬 커지게 되므로 정수가 될 수 없다.
따라서 주어진 식의 계수가 정수인 항의 개수는 4개다.

75.
광역버스 A, B가 하루 동안 경고음이 울린 시간을 확률변수 X_A , X_B 라고 하고, 두 확률변수가 정규분포를 따른다.
구하고자하는 $P(X_A \geq t) = P(X_B \leq t)$ 표준화 하면
 $P\left(z \geq \frac{t-90}{10}\right) = P\left(z \leq \frac{t-80}{15}\right)$ 이다.

두 확률이 같다는 것은 원점을 기준으로 대칭인 구간을 각각 적분했다는 것이므로 $\frac{t-90}{10} = -\left(\frac{t-80}{15}\right)$ 이고 $t=86$ 이다.

76.
주어진 이항분포 $B(n, p)$ 를 통해 확률 변수 X 의 평균과 분산을 나타내면 $E(X) = 4p$, $V(X) = 4p(1-p)$ 이다.
 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서 $E(X^2) = 3p + 1$ 이므로
 $V(X) = 3p + 1 - (4p)^2 = 4p(1-p)$
따라서 방정식 $12p^2 + p - 1 = 0$ 을 풀게 되면
 $p = \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}$ 인데 $0 < p < 1$ 이므로 $p = \frac{1}{4}$, $V(X) = \frac{3}{4}$ 이다.
 $V(10X) = 100V(X) = 75$

77.
동전의 앞면이 나온 횟수를 확률변수 X 라고 하자.

1) 주사위가 3의 배수인 경우
동전의 앞면이 0개 : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ 동전의 앞면이 1개 : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$
2) 주사위가 3의 배수가 아닌 경우
동전의 앞면이 0개 : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$ 동전의 앞면이 1개 : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$
동전의 앞면이 2개 : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$

이를 확률분포표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서, $E(X) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ 이다.

78.
1) 세 장이 같은 카드인 경우 : ${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times \frac{4!}{3!} = 48$
2) 두 장만 같은 카드인 경우 : ${}_4C_1 \times {}_3C_2 \times \frac{4!}{2!} = 144$
3) 두 장씩 쌍으로 같은 경우 : ${}_4C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 36$
4) 네 장 모두 다른 카드인 경우 : $4!$

따라서 만들 수 있는 서로 다른 4자리 숫자의 개수는 252개이다.

79.
 $x^2 + y^2 = 25$ 은 x 축, y 축, 혹은 $x=y$ 에 대하여 대칭이므로 편한 축을 기준으로 대칭됨을 생각하여 구해보자. 물론 축상의 점들이 존재한다는 점도 인식하고 있어야한다.

가장 편하게 생각할 수 있는 y 축에 대해 대칭임을 이용하여 정수점을 파악해보자.

1) y 축 상에 존재하는 정수점
 $x=0$ 이므로 $(0, 5), (0, -5)$ 두 점이 존재한다.

2) $0 < x \leq 5$ 인 경우
 $x^2 + y^2 = 25$ 을 만족하는 (x, y) 는
 $(3, 4), (3, -4), (4, 3), (4, -3), (5, 0)$ 으로 5개 존재한다.
이를 대칭시키면 y 축 이 아닌 원 위의 정수 점은 총 10개다.

즉, 원 위의 정수점의 개수는 총 12개이고 x 좌표가 3일 확률은
 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 37$ 이다.

80.
문제에서 주어진 두 식을 이용해보자.
 $\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(B)} = \frac{P(A)+P(B)}{P(A)P(B)} = \frac{24}{5}$ 에서 $P(A)+P(B) = \frac{6}{5}$ 이므로
 $P(A)P(B) = \frac{1}{4}$ 임을 알 수 있다.
두 사건 A 와 B 가 독립이므로 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 가 성립하므로
 $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ 이다.

따라서, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{5} - \frac{1}{4} = \frac{19}{20}$

정답 및 해설

81.
 모비율의 추정에서 신뢰도 95%의 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left[\hat{p} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right]$$
 108명을 임의추출하였을 때의 신뢰구간이 $[0.25 - c \leq p \leq 0.25 + c]$
 이므로 $\hat{p} = \frac{1}{4}$, $\hat{q} = \frac{3}{4}$ 임을 알 수 있다.
 따라서 주어진 식에 $\hat{p} = \frac{1}{4}$, $\hat{q} = \frac{3}{4}$, $n = 108$ 를 대입하면

$$\left[0.25 - 1.96 \times \frac{1}{24}, 0.25 + 1.96 \times \frac{1}{24} \right]$$
 이므로 $c = 1.96 \times \frac{1}{24}$ 이다.
 이번에는 동일한 신뢰도 95%에서 표본 n 과 $\hat{p} = \frac{1}{2}$, $\hat{q} = \frac{1}{2}$ 를
 신뢰구간에 대입하면 $\left[0.5 - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{4n}}, 0.5 + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{4n}} \right]$
 이다.
 따라서 앞서 구한 $c = 1.96 \times \frac{1}{24} = 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{4n}}$ 이므로 구하고자
 하는 $n = 144$ 이다.

82.
 $P(0 \leq X \leq 3) = 1$ 이므로
 $P(0 \leq X \leq 1) + P(1 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3) = k + k \times 2 + k \times 3 = 1$
 에서 $k = \frac{1}{6}$ 이다.
 따라서 $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 1\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{2}{3}$

83. $x + y$, $z + w$ 가 모두 홀수이다.
 x , z 가 모두 홀수, y , w 가 모두 짝수인 경우
 $(2x + 1) + 2y + (2z + 1) + 2w = 10$ 이므로
 $x + y + z + w = 4$ 이다.
 ${}_4H_4 = {}_7C_4 = 35$

이와 같은 경우는 총 4가지가 있다.
 (x , z 가 모두 홀수, y , w 가 모두 짝수,
 x , w 가 모두 홀수, y , z 가 모두 짝수,
 y , z 가 모두 홀수, x , w 가 모두 짝수,
 y , w 가 모두 홀수, x , z 가 모두 짝수)

따라서, 답은 총 140가지이다.

84.
 1) $a^2 - b > 0$ 인 경우 :
 (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)~(3, 6), (4, 1)~(4, 6), (5, 1)~(5, 6),
 (6, 1)~(6, 6) : 총 27가지

2) $a^2 - b = 0$ 인 경우 : (1, 1), (2, 4) : 총 2가지

따라서, $E(X) = \frac{27}{36} \times 2 + \frac{2}{36} \times 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{18} = \frac{14}{9}$ 이므로
 $E(9X) = 14$ 이다.

85.
 $E(4X) = V(4X)$ 는 $4E(X) = 16V(X)$ 이다.
 확률변수 X 가 이항분포 (n, p) 를 따르므로 $E(X) = np$, $V(X) = npq$
 ($q = 1 - p$)로 나타낼 수 있다.
 $4E(X) = 16V(X)$ 에서 $E(X) = 4V(X)$ 를 위의 n 과 p 로 나타내보자.
 $np = 4np(1 - p)$ 이므로 $p = \frac{3}{4}$ 이다.
 $P(X = 0) = \frac{1}{2^8}$ 이므로 $P(X = 0) = {}_nC_0 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2^8}$ 이다.
 따라서 $n = 4$ 이다.
 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 를 이용하면 $E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$
 이므로 $E(X^2) = \frac{3}{4} + 9$ 이고 $E(X^2) = \frac{39}{4}$ 이다.

86.
 모자를 1개 이상 받으므로,
 ${}_3H_4 \times {}_3H_3 = {}_6C_4 \times {}_5C_3 = 15 \times 10 = 150$ 이다.

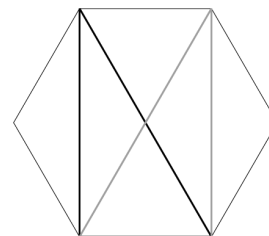
87.
 흰/흰/검 : $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$ 흰/검/검 : $\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{28}$
 검/흰/검 : $\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{28}$ 검/검/검 : $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$

따라서, 첫 번째로 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $\frac{3}{7}$ 이다.

88.
 0.9544는 $P(-2 \leq Z \leq 2)$ 이다.
 따라서, $\frac{124 - 120}{\frac{\sigma}{\sqrt{25}}} = 2$ 에서 $\sigma = 10$ 이다.

크기가 4인 표본을 임의추출할 때, 표본의 총합이 α 이상일 확률이
 0.0228이므로, $P(Z \geq 2)$ 일 때의 α 의 값을 구해야 한다.
 따라서, $\frac{\alpha - 480}{\frac{\sigma}{\sqrt{4}} \times 4} = \frac{\alpha - 480}{20} = 2$ 이다. (480은 총합의 표본평균)
 따라서, $\alpha = 520$ 이다. 그러므로 $\alpha + \sigma = 530$ 이다.

89.
 정육각형의 6개의 꼭짓점 중 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3$ 이다.
 정육각형의 한 변을 정삼각형의 변으로 할 때 만들 수 있는
 직각삼각형은 총 2개다.



따라서, 구하는 답은 $\frac{2 \times 6}{{}_6C_3} = \frac{3}{5}$ 이다.

정답 및 해설

90.

주머니에서 1개의 공을 꺼냈을 때 흰 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$ 이다. 이

경우에는 1개의 공을 더 꺼내야 하고, 총 결과적으로 남아있는 주머니에 있는 흰색 공이 1개만 있어야 하므로, 두 번째로는 검은색 공이 나와야 한다.

따라서, $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ 이다.

마찬가지로, 주머니에서 1개의 공을 꺼냈을 때 검은 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$ 이다. 이 경우 2개의 공을 더 꺼내야 한다.

2개의 공을 꺼낼 때에는 흰색 공 1개, 검은색 공 1개가 나와야 주머니에 남아있는 흰 공이 1개가 된다.

따라서, $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{2}{5}$ 이다. 그러므로 $\frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$ 이다.

91.

확률 분포표의 확률 합이 1이므로 $a = \frac{1}{4}$ 이다.

이를 통해 $E(X) = \frac{7}{4}$ 이고, $V(X) = \frac{11}{16}$ 임을 알 수 있다.

$n = 44$ 인 표본을 임의 추출하였을 때의 확률이므로

$P(\bar{X} \leq \bar{x}) = 0.8413$ 이다. 이를 표준화하면 $P(Z \leq \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 0.8413$

이고 $n = 44$, $\sigma = \frac{\sqrt{11}}{4}$, $m = \frac{7}{4}$ 를 대입한 값이 1이 되어야 한다.

따라서 $\bar{x} = \frac{15}{8}$ 이다.

92.

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{3}$ 이다.

$$\{P(A)\}^2 + \{P(B)\}^2 = \{P(A) + P(B)\}^2 - 2P(A)P(B)$$

$$\begin{aligned} \{P(A) + P(B)\}^2 &= \{P(A)\}^2 + \{P(B)\}^2 + 2P(A)P(B) \\ &= \frac{25}{36} + \frac{2}{3} = \frac{49}{36} \end{aligned}$$

$P(A) + P(B) = \frac{7}{6}$ 이고, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ 이므로

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ 이다.

93.

1) 5번째 시행에서 동전이 앞면이 나오는 경우

5번째 동전이 앞면이 나오면 1~4차의 시행과 관계없이 반드시 24원 이상이 된다. 따라서 5번째 시행이 앞면이 나오는 확률 : $\frac{1}{2}$

2) 5번째 시행에서 동전이 앞면이 나오지 않는 경우

3,4차 시행의 동전이 모두 앞면이 나와야만 24원 이상이 된다.

따라서 5번째 시행은 뒷면이 나오고 3,4시행은 앞면이 나와야 하므로

확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

따라서 24원 이상을 받을 확률은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ 이다.

94.

화폐 A의 현재 가치를 c_A 라 하면, 화폐 A의 일주일 후의 환율 X 는

평균이 c_A , 표준편차가 $c_A k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}$ 인 정규분포를 따른다.

화폐 B의 현재 가치를 c_B 라 하면, 시장불안정성 지표가 8배,

거래량이 36배이므로 화폐 B의 일주일 후의 환율 Y 는 평균이 c_B ,

표준편차가 $c_B(8k)^{\frac{2}{3}}(36p)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}c_B k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}$ 인 정규분포를 따른다.

확률변수 X 와 Y 를 표준화시켜 정리하면

$$P(X \geq \frac{103}{100}c_A) = P(Z \geq 1) = P(Z \geq \frac{(\frac{103}{100} - 1)c_A}{c_A k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}}) \text{이고,}$$

$$P(Y \geq c_B + \frac{a}{100}c_B) = P(Z \geq 2) = P(Z \geq \frac{\frac{a}{100}c_B}{\frac{2}{3}c_B k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}}) \text{이므로}$$

$$2 \frac{\frac{3}{100}c_A}{c_A k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{a}{100}c_B}{\frac{2}{3}c_B k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}} \text{를 만족시킨다. 정리하면 } a = 4 \text{이다.}$$

95.

(가) 짝수개, 홀수개만큼 뽑을 그릇을 2개씩 선택하는 경우의 수는

${}_4C_2 = 6$ 이다.

(나) 홀수에서 1을 빼면 짝수가 된다. 그러므로 홀수개만큼 뽑을 그릇 두 종류를 먼저 하나씩 뽑아둔다면, 네 종류의 그릇을 짝수개만큼 선택해 총 8개를 뽑는 경우의 수와 동일하다.

즉 네 종류의 그릇을 중복을 허락해 4개만큼 뽑는 경우의 수와 같다.

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = 35$$

(다) $6 \times 35 = 210$ 이 구하는 경우의 수가 된다.

96.

실선 방향으로 움직이는 것은 1칸, 점선 방향으로 움직이는 것은 2칸 이동하는 것으로 해석할 수 있다. 그렇다면 6번 공이 돈 이후에 게임이 끝나기 위해서는 10칸을 이동해 A로 되돌아오는 것으로 해석할 수 있다.

그렇다면 점선 방향으로 이동하는 횟수를 x 회, 실선 방향으로

이동하는 횟수를 y 회로 놓으면 연립방정식 $x + y = 6$, $x + 2y = 10$ 를 얻을 수 있다.

그러므로 실선 방향으로 2회, 점선 방향으로 4회 이동한다면,

오각형을 두 바퀴 돌아 A로 되돌아온다. 이렇게 움직이는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$ 가지이다.

다만, 중간에 A를 지나게 되면 게임이 끝나기 때문에 중간에 A를 지나 A로 되돌아오는 경우를 제외해야 한다. 실선 방향으로 1회, 점선 방향으로 2회 움직이면 한 바퀴 돌아 A로 되돌아오게 된다.

다시 실선 방향으로 1회, 점선 방향으로 2회 움직이면 두 바퀴 돌아 A로 되돌아오게 된다. 이렇게 움직이는 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$ 가지이므로 이 경우를 제외하면 된다.

그러므로 구하는 확률은 $(15 - 9) \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{243}$ 이다.

정답 및 해설

97.

i) 세 공의 색이 모두 다른 경우(ABC)

첫 번째에는 아무 공이나, 두 번째에는 뽑았던 공의 색깔과 다른 색의 공을, 세 번째에는 첫 번째, 두 번째에 뽑았던 공의 색과 다른 색의 공을 뽑아야 한다. 따라서 $\frac{6}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$ 이다.

ii) 첫 번째 공과 두 번째 공의 색이 다르고, 첫 번째 공과 세 번째 공의 색이 같은 경우(ABA)

첫 번째에는 아무 공이나, 두 번째에는 뽑았던 공의 색깔과 다른 색의 공을, 세 번째에는 첫 번째에 뽑았던 공의 색과 같은 색의 공을 뽑아야 한다.

$$\frac{6}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

남은 3개의 공을 순서대로 하나씩 뽑을 때, 같은 색깔의 공이 연속해서 나오지 않을 확률을 구해보자.

처음에 i)의 방식으로 세 공을 모두 다르게(ABC) 뽑았으면, 남아있는 공도 서로 모두 다를 것(ABC)이므로, 아무렇게나 뽑아도 같은 색의 공이 연달아 나오지 않는다.

처음에 ii)의 방식으로 처음 뽑은 공과 마지막에 뽑은 공의 색만 같게(ABA) 뽑았으면, 한 색깔의 공이 2개, 다른 색깔의 공이 1개 남아 있을 것(BCC)이므로, 마찬가지로 처음 뽑은 공과 마지막에 뽑은 공의 색만 같게(CBC) 뽑아야 같은 색의 공이 연달아 나오지 않는다.

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}$$

그러므로 구하는 확률은 $\frac{\frac{2}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}$ 이다.

98.

1) 함수가 극값을 갖는 점의 개수를 구하기 위해서는 함수를 미분한 후 도함수의 부호가 변하는 점의 개수를 찾으면 된다. 우선 함수 $f(x) = x(x^a + x^b)$ 를 미분하기 위해서는, 일단 최고차항에 대해 알아야 한다.

$a > b$ 일 때 최고차항은 x^{a+1}

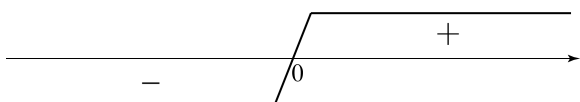
$a = b$ 일 때 최고차항은 $2x^{a+1}$

$a < b$ 일 때 최고차항은 x^{b+1}

이다. 따라서 가능한 순서쌍 (a, b) 는 $a > b$ 일 때, $a = b$ 일 때, $a < b$ 일 때 이렇게 세 가지 경우로 나뉘게 된다. $a > b$ 일 때와 $a < b$ 일 때의 각각의 순서쌍은 (1, 5)와 (5, 1)처럼 서로 일대일로 대응하고, 함수 역시 같으므로 $a < b$ 일 때의 경우의 수는 따로 셀 필요 없이, $a > b$ 일 때의 경우의 수를 구한 뒤 2를 곱해주면 될 것이다.

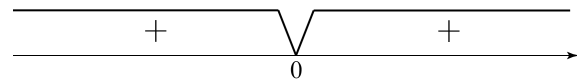
2) 일단 $a = b$ 일 때가 간단하므로 먼저 구해하자. 증감표를 그리기 위해 일단 먼저 $f'(x)$ 의 식을 구해보면, $a = b$ 일 때 $f(x) = 2x^{a+1}$ 이므로, $f'(x) = 2(a+1)x^a$ 이다.

a 가 홀수일 때 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같으므로, $f(x)$ 는 1개의 극값을 갖는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 (1, 1), (3, 3), (5, 5)이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a 가 짝수일 때 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같으므로, $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 (2, 2), (4, 4), (6, 6)이므로, 경우의 수는 3가지이다.

3) $a > b$ 일 때 $f(x)$ 의 개형을 살펴보자. 증감표를 그리기 위해 일단 먼저 $f'(x)$ 의 식을 구해보면,

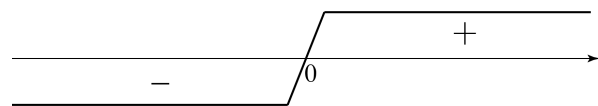
$$f'(x) = (a+1)x^a + (b+1)x^b = (a+1)x^b \left\{ x^{a-b} + \frac{b+1}{a+1} \right\}$$

이므로, b 가 홀수일 때 $f'(x)$ 는 $x=0$ 근처에서 부호가 변하고, b 가 짝수일 때 $f'(x)$ 는 $x=0$ 근처에서 부호가 변하지 않는다.

$a-b$ 가 짝수일 때 $x^{a-b} = -\frac{b+1}{a+1}$ 는 근을 갖지 않고, $a-b$ 가

홀수일 때 $x^{a-b} = -\frac{b+1}{a+1}$ 는 하나의 음수 근을 갖는다.

a 가 홀수, b 가 홀수일 때 $a-b$ 는 짝수이다. 이 때 $f(x)$ 의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$ 는 1개의 극값을 갖는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 (3, 1), (5, 1), (5, 3)이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a 가 홀수, b 가 짝수일 때 $a-b$ 는 홀수이다. 이 때 $f(x)$ 의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$ 는 1개의 극값을 갖는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 (3, 2), (5, 2), (5, 4)이므로, 경우의 수는 3가지이다.

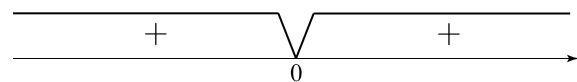
a 가 짝수, b 가 홀수일 때 $a-b$ 는 홀수이다. 이 때 $f(x)$ 의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$ 는 2개의 극값을 갖는다.



이를 만족시키는 순서쌍은

(2, 1), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3), (6, 5)이므로, 경우의 수는 6가지이다.

a 가 짝수, b 가 짝수일 때 $a-b$ 는 짝수이다. 이 때 $f(x)$ 의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 $(4, 2), (6, 2), (6, 4)$ 이므로, 경우의 수는 3가지이다.

4) $b > a$ 일 때의 경우의 수는 $a > b$ 일 때와 동일하다.

5) 그러므로 극값의 개수가 0개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 9가지이다.

극값의 개수가 1개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 15가지이다.

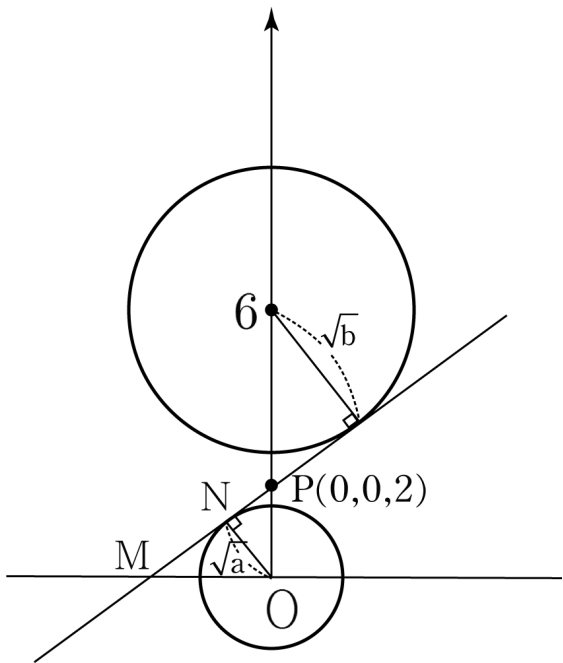
극값의 개수가 2개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 12가지이다.

이에 따라 확률분포표를 그리면

X	0	1	2	합계
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	1

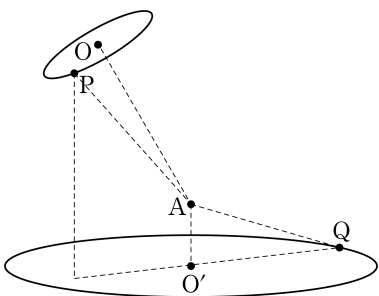
이므로 $E(X) = \frac{13}{12}$ 이다.

99. 특정 방향에서 문제의 상황을 바라보게 되면 다음과 같이 단면이 된다.



xy 평면과 이루는 각 $\angle OMN$ 이 30° 이므로 $\angle PON = 30^\circ$ 이다.
 각 구의 중심에서 평면에 수선의 발을 내리면 $\overline{OP} \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{a}$ 이고
 $\overline{OP} = 2$ 이므로 $\sqrt{a} = \sqrt{3}$ 이다. 수선의 발을 내려서 만들어진 두
 삼각형은 닮음비가 $1:2$ 이므로 $\sqrt{b} = 2\sqrt{3}$ 이므로 $b = 12$ 이다
 따라서, $a + b = 15$ 이다.

100.
이 문제의 상황을 그림으로 나타내보자.



점 P에서 아랫 원에 수선의 발을 내린 후 가장 먼 점을 Q라 하면,
 $\angle PAQ = \angle O'AP + \angle O'AQ$ 가 된다.

그런데 이렇게 계산할 경우, $\angle PAQ$ 는 점 P가 어디에 있던지
 180° 가 넘는다. 따라서 위와 같이 계산할 경우 $\angle PAQ$ 의 최댓값을
구하는 것이 아니라 $360^\circ - \angle PAQ$ 의 최댓값을 구해주어야 한다.

그렇다면 $\angle O'AP$ 가 최소가 되는 지점을 찾아주어야 한다.

이 역시 점 O'에서 윗 원에 수선의 발을 내린 후 최단거리를
찾아주면 된다.

$\cos \angle PAQ = \cos(2\pi - \angle PAQ) = \cos(2\pi - \angle O'AP - \angle O'AQ)$ 에서 $\angle O'AP$ 의 최소가 되는 지점에서의 $\cos$ 값을 구해보면,

$$\cos(\angle O'AO - \angle OAP) = -\frac{4}{5} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{9}{5\sqrt{10}}$$

이다.

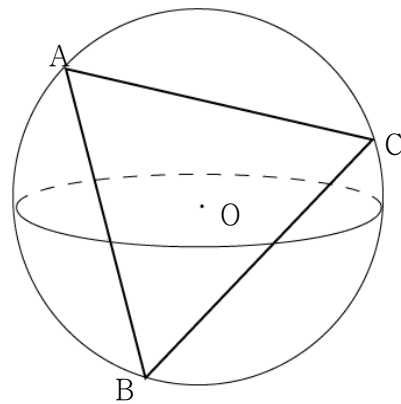
따라서, $\cos(\angle O'AP) = -\frac{9}{5\sqrt{10}}$ 임을 알 수 있다.

또한 $\cos(\angle O'AQ) = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{그러므로, } & \cos(2\pi - \angle O'AP - \angle O'AQ) \\ &= \cos(\angle O'AP + \angle O'AQ) = -\frac{9}{50} - \frac{39}{50} = -\frac{24}{25} \end{aligned}$$

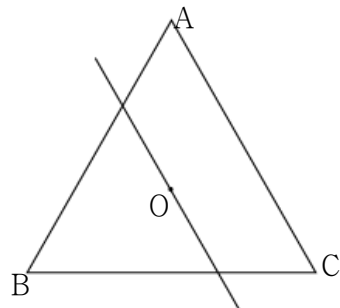
가 $\cos \angle PAQ$ 의 최솟값이 된다.

101. 문제의 상황은 다음 그림과 같다.



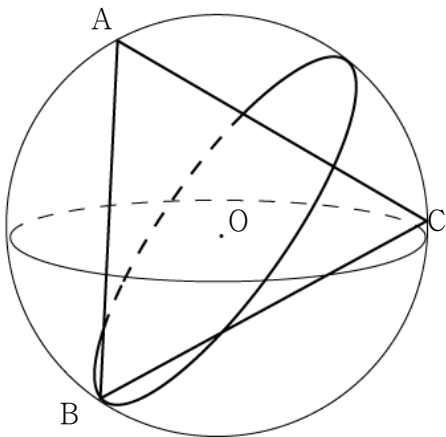
간단하게 보기 위하여 삼각형이 이루는 평면이 단면으로 보이도록 하자.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ 이므로 $\overrightarrow{AC}$ 을 평행이동 하여 원점 O 를 지나게 해주면 아래 그림과 같다.



따라서 점 P는 $\overrightarrow{AC}$ 를 법선벡터로 가지고 원점 O를 지나는 평면과 구의 교선 위에 존재 할 것이다. 즉 다음 그림과 같을 것 이다.

정답 및 해설



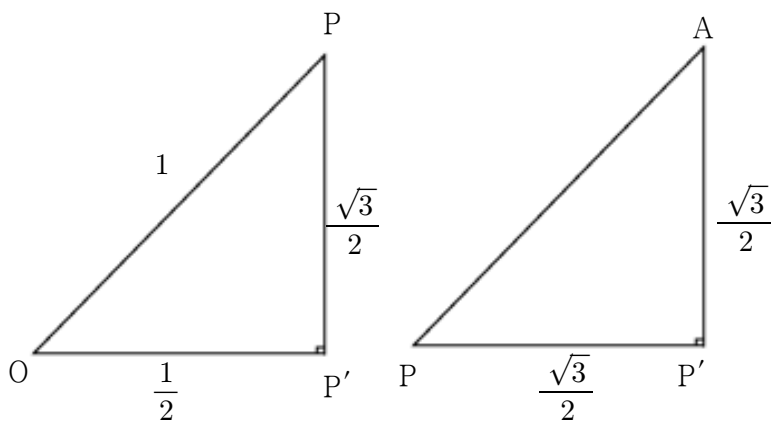
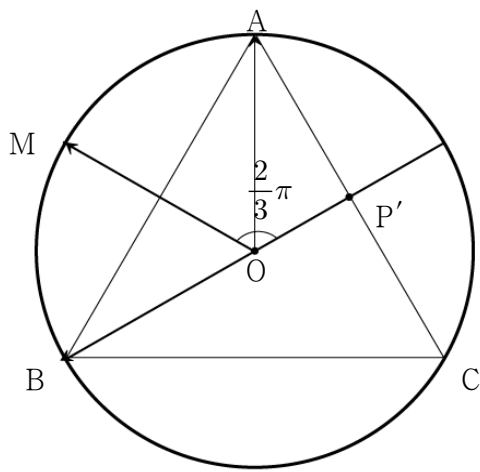
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) \\ &= |\overrightarrow{OP}|^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}) = \frac{3}{4} \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} = -\frac{1}{4} \text{ 점 } P \text{에서 삼각형이 존재하는 평면에 내린}\end{aligned}$$

수선의 발을 P' 이라고 하면 점 P' 은 점 B 에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선위에 존재 할 것이다. 또한 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}$ 이므로 삼각형을 포함하는 평면에 존재하는 임의의 벡터와 $\overrightarrow{P'P}$ 는 수직 이므로 $\overline{AB}$ 의 중점을 M 이라고 하면 $2\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}) = 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP'} = -\frac{1}{4}$ 이다.

내적의 결과가 음수이므로 이루는 각도는 $\frac{\pi}{2}$ 보다 큼을 알 수 있다.

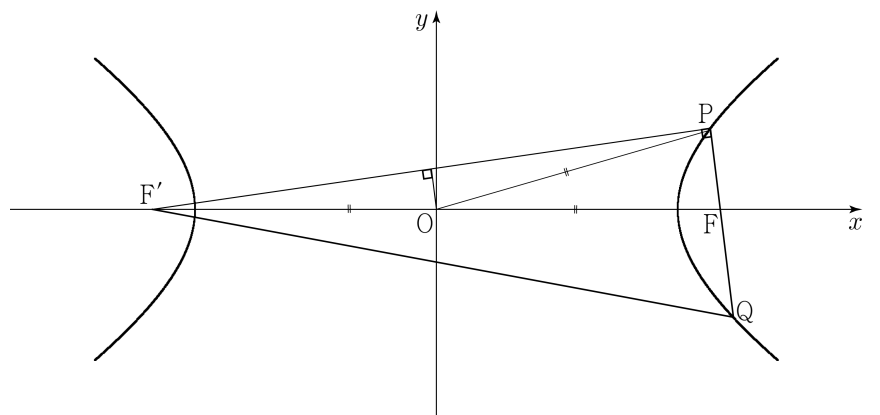
$$\overrightarrow{OP'} = x \text{라고 하면 } 1 \times x \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{4} \text{ 이므로 } x = \frac{1}{2}$$

따라서 점 P' 은 그림과 같이 위치한다.



$$\triangle OPP' \text{에서 } \overrightarrow{P'P} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로, } \triangle AP'P \text{에서 } |\overrightarrow{AP}|^2 = \frac{3}{2} \text{이다.}$$

102.



$\overline{OP} = \overline{OF}$ 라는 조건을 문제에 표현해보면 $\overline{OP} = \overline{OF} = \overline{OF'}$ 이다. 따라서 삼각형 $F'FP$ 는 직각삼각형을 알 수 있다. (중심 O 를 기준으로 원을 그릴 수 있음)

$\overline{F'P} = x$, $\overline{PF} = y$ 라고 하면, 쌍곡선의 정의를 통해 $x - y = 6\sqrt{2}$ 이고 $x^2 + y^2 = 100$ 임을 알 수 있다.

두 식을 연립하면 $(y + 6\sqrt{2})^2 + y^2 = 100$, $y^2 + 6\sqrt{2}y - 14 = 0$ 이므로 $y = -7\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ 이다. $y > 0$ 이므로 $y = \sqrt{2}$ 이다.

이를 통해 $x = 7\sqrt{2}$ 란 것 또한 알 수 있다.

$\angle F'PF = 90^\circ$ 이므로 삼각형 $F'PQ$ 도 직각삼각형이다.

같은 방법으로 $\overline{F'Q} = a$, $\overline{QF} = b$ 라고 하면 $\overline{F'P}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{F'Q}^2$ 이므로 $(7\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + b)^2 = a^2$ 이고, 쌍곡선의 정의에 의해

$a - b = 6\sqrt{2}$ 이므로 두 식을 연립하자.

$$(7\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} + b)^2 = (b + 6\sqrt{2})^2$$

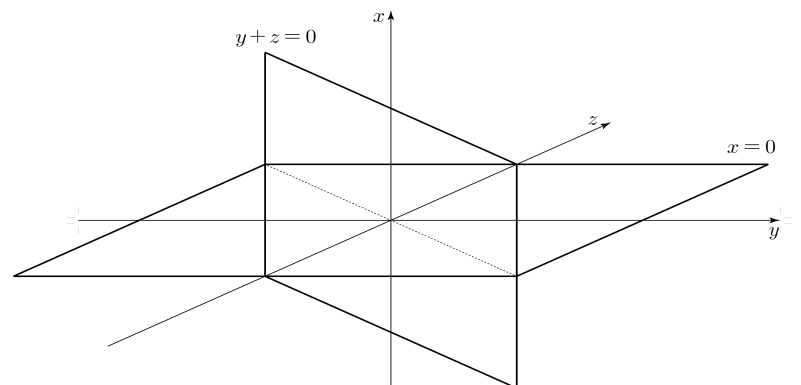
$$10\sqrt{2}b = 28, \therefore b = \frac{7\sqrt{2}}{5}, a = \frac{37\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{삼각형 } F'PQ \text{의 넓이는 } S = \frac{1}{2} \times 7\sqrt{2} \times \frac{12\sqrt{2}}{5} = \frac{84}{5}$$

따라서 $5S = 84$ 이다.

103.

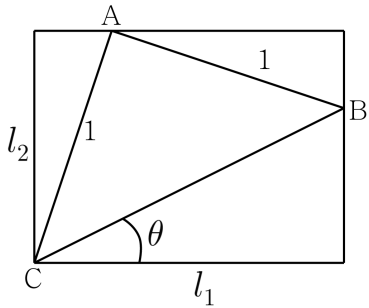
두 평면 $y + z = 0$, $x = 0$ 을 모두 그려보면,



두 평면에 모두 수직인 평면의 방정식은, 직육면체의 관점에서 두 평면에 모두 수직이면 되므로 $y - z = 0$ 임을 알 수 있다. (위의 그림을 가지고 두 평면에 모두 수직인 평면을 상상합니다.)

정답 및 해설

그렇다면,



(위의 그림을 90도 돌렸을 뿐이다.)

이 그림도 평면 $y-z=0$ 위에 있음을 확실히 알 수 있다. 위의 그림에서 직사각형을 평면 $y-z=0$ 라 생각해 보면, 선분 l_1 의 방향벡터는 $(0, 1, 1)$ 임을 알 수 있고, 선분 l_2 의 방향벡터는

$(1, 0, 0)$ 임을 알 수 있다. 그런데, $\sqrt{2}\cos\theta + \cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \sqrt{5}$

이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\theta = \sqrt{5}$ 이다.

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 임을 알 수 있다.

따라서 선분 BC의 선분 l_2 위로의 정사영, 즉 $\sqrt{2}\sin\theta$ 의 값은

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ 이고, l_1 의 길이가 $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ 이므로, 선분 BC의 방향벡터는

$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ 임을 알 수 있다. 이 방향벡터에 $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$ 배씩

해주면, 선분 BC의 방향벡터는 $\left(1, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ 가 된다. 따라서

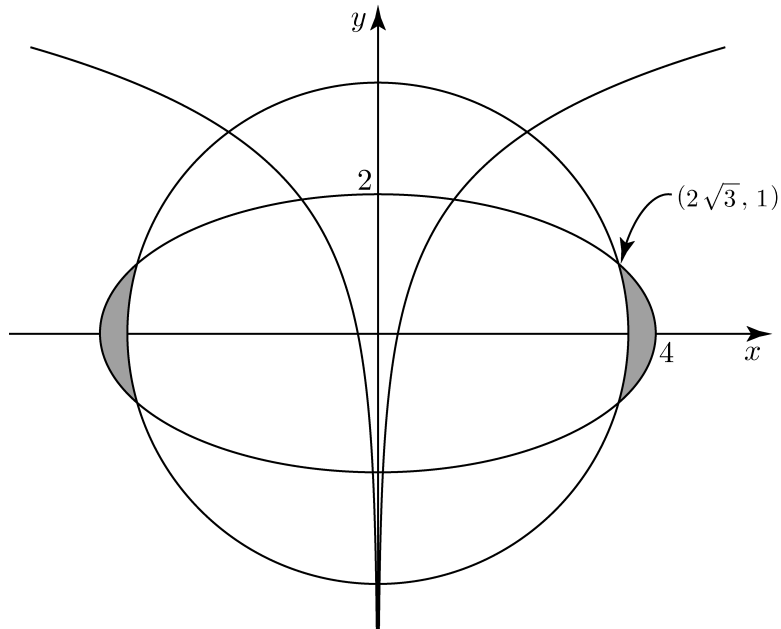
$10ab = 45$ 임을 알 수 있다.

$\therefore$ 직선 l_2 는 x 축으로의 이동이므로 $\overrightarrow{BC}$ 를 l_2 에 정사영 시킨 크기는 $\overrightarrow{BC}$ 의 x 값의 크기 변화를 알려준다. 마찬가지로 l_1 은 y, z 의 크기 변화를 알려준다.

104.

$a = \sqrt{13}$ 일 때 영역 S 의 경계와 영역 T 의 경계의 교점은 $(2\sqrt{3}, 1), (-2\sqrt{3}, 1), (2\sqrt{3}, -1), (-2\sqrt{3}, -1)$ 이다.

영역 $S \cap T$ 가 나타내는 영역은 다음 그림에서 색칠한 부분과 같다.



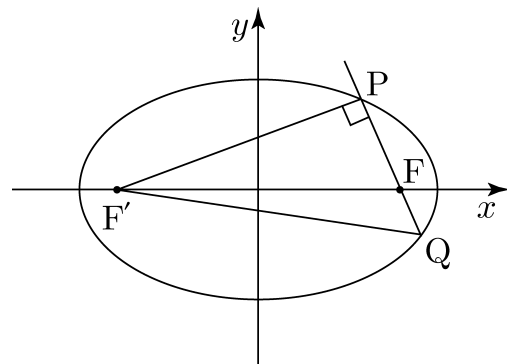
영역 $S \cap T$ 가 항상 영역 $y \leq \log_2|mx|$ 에 속해야 하므로 위 그림에서 함수 $y = \log_2|mx|$ 의 $x = 2\sqrt{3}$ 에서의 y 값이 항상 1보다 크거나 같아야 함을 알 수 있다. 즉 $\log_2|2\sqrt{3}m| \geq 1$ 이므로 $m \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고,

따라서 양수 m 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

105.

그림을 그리는 편의를 위해 한 초점 F의 x 좌표가 양수라 가정해도 문제를 풀 때 일반성을 잃지 않는다. 다른 한 초점을 F'라 하자.

우선 타원의 정의에 의해 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 4\sqrt{2}$ 이고, 문제의 조건에 따라 $\overline{PF} = \sqrt{2}$ 을 알고 있으므로 $\overline{PF'} = 3\sqrt{2}$ 를 얻는다. $\overline{FF'} = 2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 PFF'에서 피타고라스의 정리가 성립함을 알 수 있고, 삼각형 PFF'은 $\angle P = 90^\circ$ 인 직각삼각형임을 안다. 또한 삼각형 PQF'도 직각삼각형이다. 지금까지 알아낸 정보를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이제 선분 QF의 길이를 구하기 위해 $\overline{QF} = x$ 라 하면, 삼각형 PQF'에서 피타고라스 정리에 의해

$(\sqrt{2} + x)^2 + (3\sqrt{2})^2 = (4\sqrt{2} - x)^2$ 이고,

정리하면 $x = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ 를 얻는다.

106.

$y^2 = 4x$ 에서 양변을 x 에 관해 미분하면 $2y \frac{dy}{dx} = 4$ 이다.

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$ 이므로 $\left(\frac{a^2}{4}, a\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$y = \frac{2}{a}\left(x - \frac{a^2}{4}\right) + a = \frac{2}{a}x + \frac{a}{2}$ 이다.

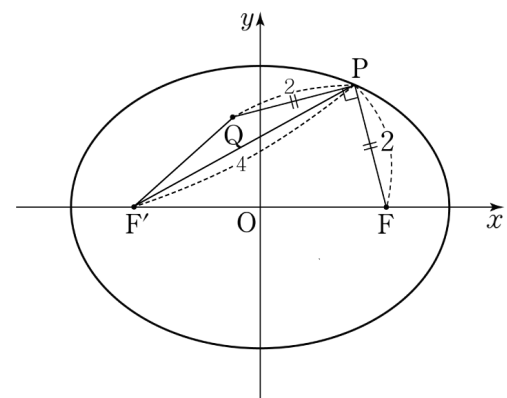
또한 $y = -x^2$ 위의 점 $(b, -b^2)$ 에서의 접선의 방정식은

$y = -2b(x - b) - b^2 = -2bx + b^2$ 이다.

$\frac{2}{a} = -2b$, $\frac{a}{2} = b^2$ 에서 $ab = -1$, $2b^2 = a$ 이므로 $2b^3 = -1$ 이다.

$m^3 + 8n^3 = -8b^3 + 8b^6 = 4 + 2 = 6$ 이다.

107.



정답 및 해설

타원의 정의에 의해 $\overline{PF'} = 4$ 이고, 초점거리를 구하면 $\overline{OF} = 2$ 이므로 $\triangle PFF'$ 는 이등변 삼각형임을 알 수 있다.

$\angle FPF' = \theta$, $\angle F'PQ = \alpha$ 라고 하면 $\theta + \alpha = 90^\circ$ 이다.

구하고자하는 삼각형 PQF' 의 넓이는 $S = \frac{1}{2} \overline{PQ} \times \overline{PF'} \times \sin \alpha$ 이다.

$$\sin \alpha = \sin(90 - \theta) = \cos \theta$$

점 F' 에서 $\overline{PF}$ 에 수선을 내리면 $\cos \theta = \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 삼각형 PQF' 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{1}{4} = 1$ 이다.

108.

y 축에 평행하므로 평면의 법선벡터는 y 축과 수직이다.

평면의 법선벡터를 $(1, a, b)$ 라 하고 $x + ay + bz = c$ 라고 할 수 있다.

$(1, a, b) \cdot (0, 1, 0) = 0$ 이므로 $a = 0$ 임을 알 수 있다.

평면 $x + bz = c$ 이 $(0, 0, 2)$ 를 지나므로 $c = 2b$ 이다.

이 평면이 구 $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ 와 접하므로 평면까지의 거리는 3이다.

$$\frac{|3-b|}{\sqrt{1+b^2}} = 3, \quad 9(1+b^2) = b^2 - 6b + 9 \quad \text{이므로} \quad b = -\frac{3}{4} \text{이다.}$$

$$\text{이 평면과 원점사이의 거리는 } d = \frac{\left| \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{1 + \frac{9}{4}}} = \frac{6}{5} \text{ 이므로}$$

$$100d = 120 \text{이다.}$$

109.

점 P 에서 삼각형 ABC 의 변까지 최단거리는 점 P 에서 각 변에 내린 수선의 길이일 것이다.

점 P 에서 xy -평면에 수선의 발을 내리고, 수선의 발인 점 F 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발은 삼수선의 정리에 의해 P 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발과 일치한다.

$\overline{PF} = 1$ 이고 F 에서 AB 에 내린 수선의 길이는 $\frac{6}{\sqrt{13}}$ 이다.

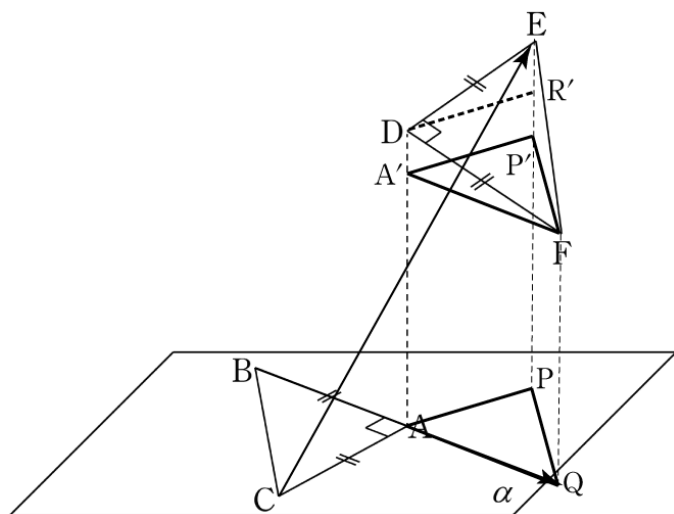
따라서 P 에서 선분 AB 까지 최단거리는 $\frac{7}{\sqrt{13}}$ 이다.

같은 방법으로 세 변에 대해 삼수선의 정리를 사용하면 문제에서 요구하는 최단거리는 $\frac{7}{\sqrt{13}}$ 가 된다.

따라서 $13a^2 = 49$ 이다.

110.

먼저 조건에 맞게 그림을 그리면 다음과 같다.



$\angle CAQ = 90^\circ$ 이므로 Q 는 $\overline{BA}$ 의 연장선상에 있다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{BQ} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PE}) \\ &= \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{BQ}| \cdot |\overrightarrow{AP}| \cos \theta \quad (\theta = \angle PAQ = 60^\circ) \end{aligned}$$

$\overline{AP}$ 를 구하기 위해 정사영한 $\triangle AQP$ 를 평행 이동하여 점 Q 가 점 F 와 일치하도록 한다.

점 D 에서 $\overline{EP'}$ 에 수선을 내리면 $\triangle FDA' \equiv \triangle EDR'$ 이다.

$\overline{AD'} = a$ $\triangle EP'F$ 와 $\triangle DA'F$ 에서 $\overline{A'F} = \overline{P'F}$ 임을 이용하면

$$1 - a^2 = 2 - 4a^2, \quad a = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{임을 알 수 있다.}$$

따라서 정사영 된 삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 이 되고

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{BQ}| \cdot |\overrightarrow{AP}| \cos \theta \\ &= (1 + \sqrt{\frac{2}{3}}) \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{2 + \sqrt{6}}{6} \text{이 된다.} \end{aligned}$$

따라서, $p^2 + q^2 = 40$ 이다.

111.

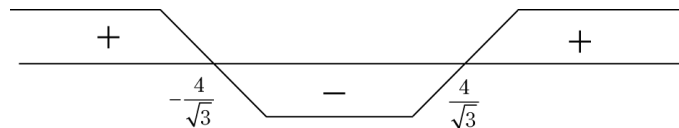
주어진 식을 통해 $f(a) = 2a$, $g(a) = 2\sqrt{a^2 - 4}$ 임을 알 수 있다.

$$h(a) = 2f(a) - g(a) = 4a - 2\sqrt{a^2 - 4}$$

$$h'(a) = 4 - \frac{4a}{2\sqrt{a^2 - 4}} = \frac{8\sqrt{a^2 - 4} - 4a}{2\sqrt{a^2 - 4}}$$

$a > 2$ 이므로 분모는 항상 양수이다. 분자의 부호 변화를 살펴보자.

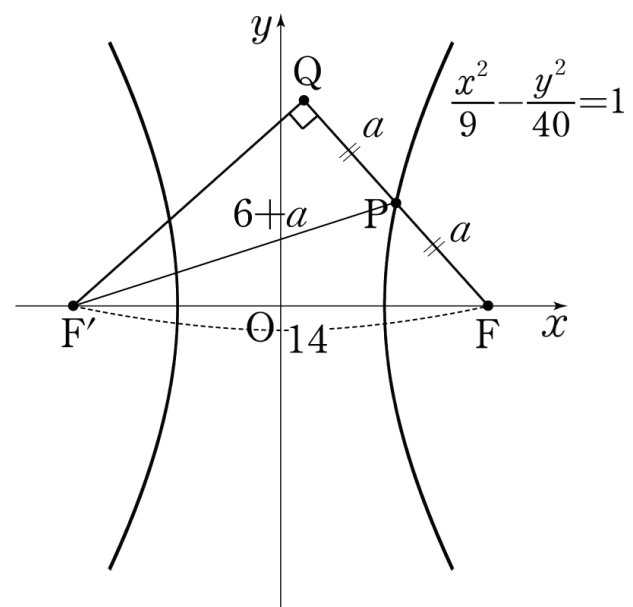
$$8\sqrt{a^2 - 4} - 4a \text{의 교점은 } \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \text{이다.}$$



$\frac{4}{\sqrt{3}}$ 에서 극솟값을 갖게 되므로 최솟값은

$$h\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{이 된다.}$$

112.



$$\overline{PQ} = \sqrt{14^2 - 4a^2}$$

$\triangle PF'Q$ 에 대해 피타고라스 정리를 사용하면,

$$(6+a)^2 = a^2 + (14^2 - 4a^2) \text{ 이므로, } a = 5 \text{이다.}$$

따라서, 선분 PF 의 길이는 5이다.

정답 및 해설

113.

$y = x^2 + ax + b$ 이므로 $x^2 = 4py$ 의 꼴을 생각하면 초점거리

$p = \frac{1}{4}$ 이다.

포물선의 성질에 의해 초점에서 포물선위의 한 점 까지 거리는 그 점에서부터 준선까지의 거리와 동일하므로 준선에서 $2p$ 만큼 올라오면 초점의 y 좌표임을 알 수 있다.

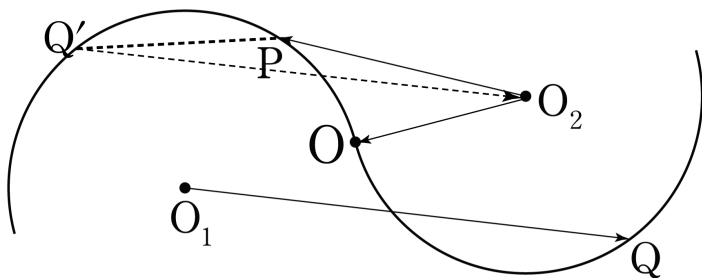
초점의 좌표 : $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$, 꼭지점의 좌표 : $\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$

이에 해당하는 포물선을 만들면 $(x+2)^2 = y + \frac{3}{4}$ 이다.

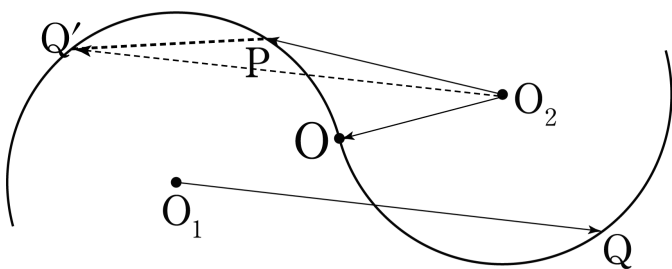
이를 전개해서 준 식과 비교하면 $a=4$, $b=\frac{13}{4}$ 이므로

$a+4b=17$ 이다.

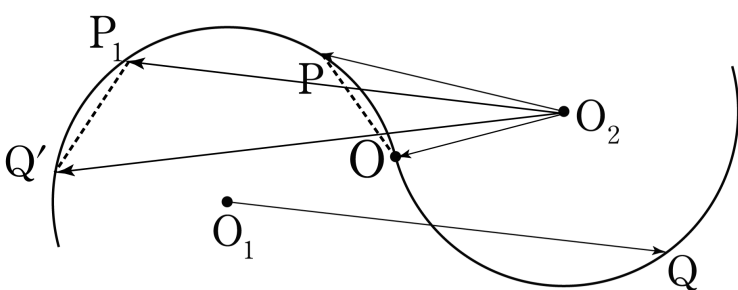
114.



벡터의 합을 쉽게 하기위해 두 벡터의 시점과 종점을 일치시킨다.
 O_1 이 Q' 이 되고, Q 가 O_2 가 되어 $|\overrightarrow{Q'O_2} + \overrightarrow{O_2Q}| = 1$ 을 만족한다.



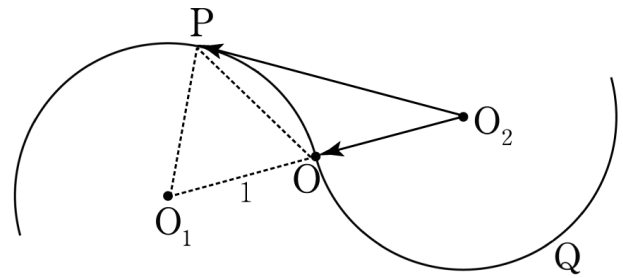
이번에는 내적을 위해 $\overrightarrow{O_1Q}$ 를 O_1 이 O_2 와 일치하도록 대칭시킨다.



조건을 만족시키는 벡터 합의 크기가 1을 만족하는 Q' 과 P_1 을 상상해보자.

$\overrightarrow{O_2Q'} \cdot \overrightarrow{O_2P_1} \geq \overrightarrow{O_2P_1} \cdot \overrightarrow{O_2O} \geq \overrightarrow{O_2P} \cdot \overrightarrow{O_2O}$ 를 만족한다.

이때 P 는 조건을 만족하는 가장 작은 벡터이다.

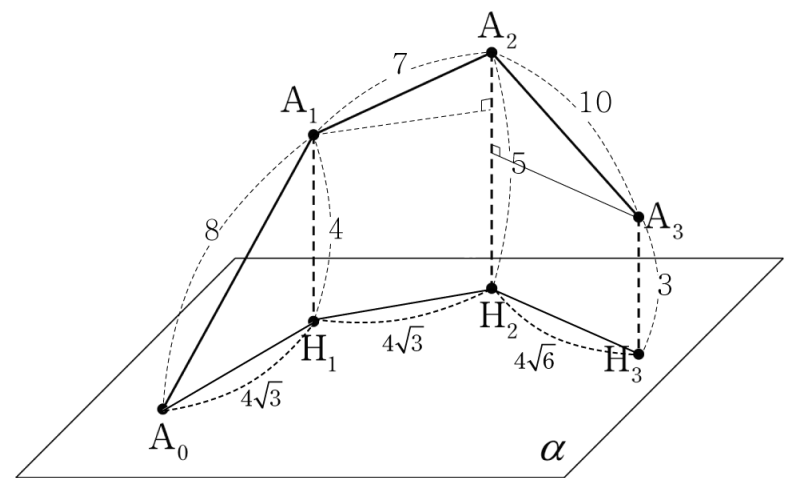


따라서 $|\overrightarrow{O_1Q} \cdot \overrightarrow{O_2P}|$ 의 최솟값은 $\triangle OO_1P$ 가 정삼각형을 이루는 벡터일 때이다.

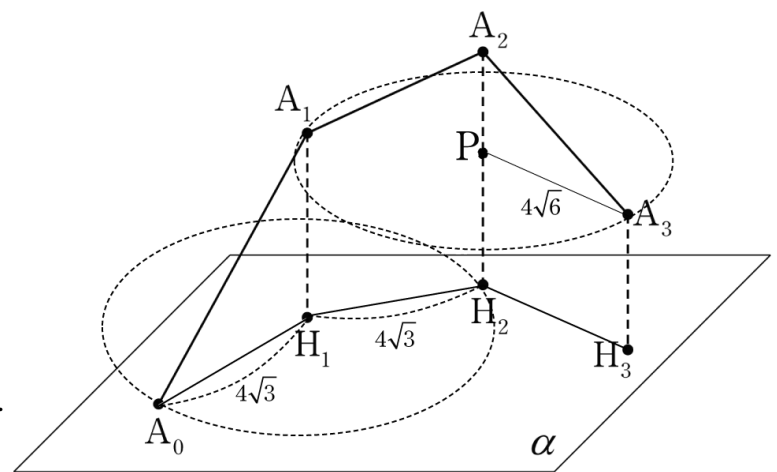
$$|\overrightarrow{O_1Q} \cdot \overrightarrow{O_2P}| = |\overrightarrow{O_2O}| |\overrightarrow{O_2P}| \cos 30^\circ = \frac{3}{2}$$

115.

주어진 조건들을 통해 주어진 그림에서 알 수 있는 정보들을 그림에 나타내면 다음과 같다.

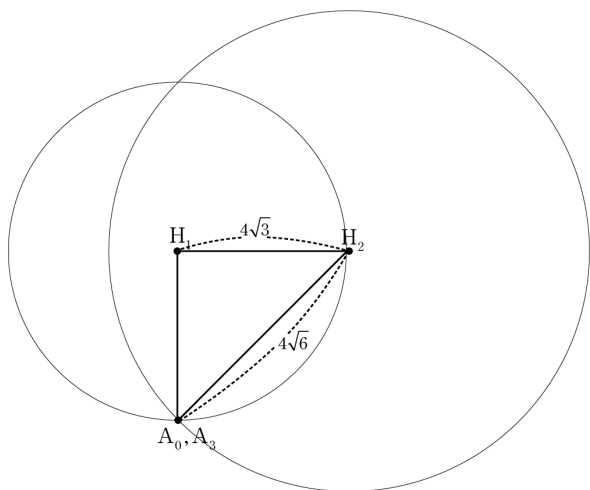


먼저, $\overline{A_0A_3}$ 가 최소가 되는 상황을 찾아야 하는데 점 A_0 와 점 A_3 가 고정된 선분 A_1A_2 를 중심으로 원뿔 형태로 움직일 수 있다는 점을 생각하여 그림에 나타내면 다음과 같다.



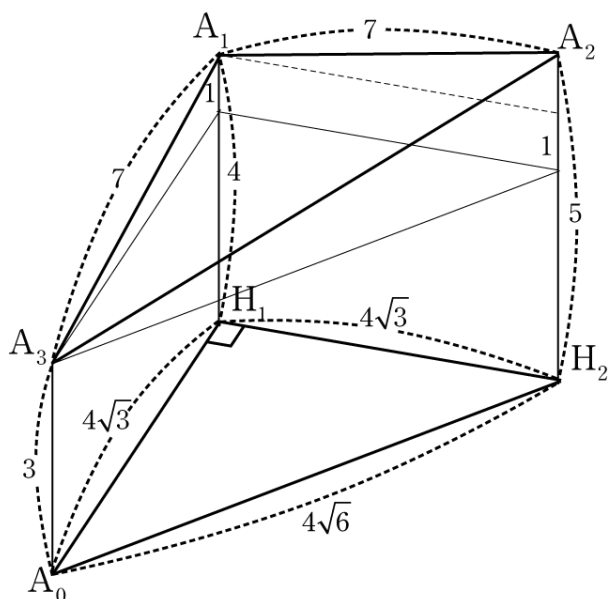
이를 위에서 내려다본 그림으로 나타내면 다음과 같다.

정답 및 해설



즉, 위에서 봤을 때 두 점 A_0 와 A_3 가 일치하는 상황에서 $\overline{A_0A_3}$ 가 최소가 됨을 알 수 있으므로 $\overline{A_0A_3}=3$ 이다.

문제의 그림을 다시 그려보면 다음과 같다.



삼각형 $A_1A_2A_3$ 이 이루는 평면과 평면 α 가 이루는 각은 정사영을 통해 구하자.

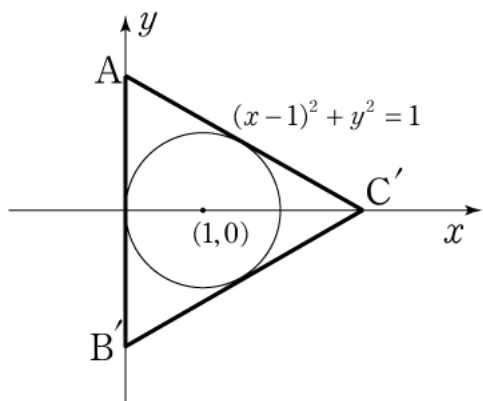
$$S_{\triangle A_1A_2A_3} = 10\sqrt{6}, \quad S_{\triangle A_0H_1H_2} = 24$$

$$S_{\triangle A_1A_2A_3} \cos \theta = S_{\triangle A_0H_1H_2}$$

$$\cos \theta = \frac{24}{10\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

따라서, $25\cos^2\theta = 24$ 이다.

116.

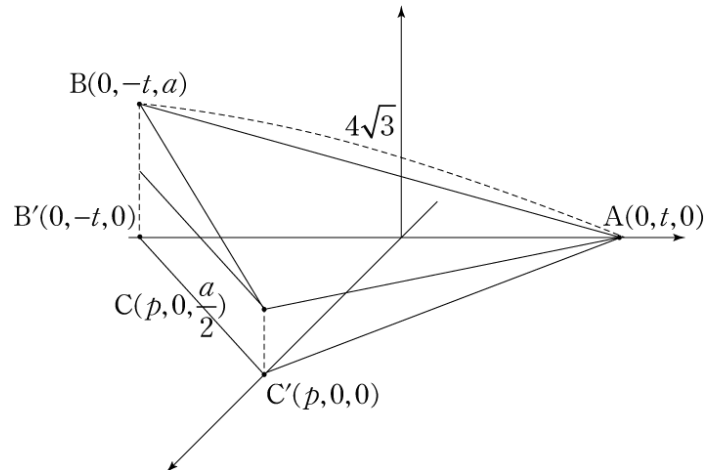


먼저 xy 평면상의 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 을 나타내고, 이 원에 접하는 삼각형은 위 그림인 경우를 제외하고는 불가능하다는 것을 알 수 있다.

즉, xy 평면상의 점(A)과 yz 평면의 점(B)을 xy 평면으로 정사영한 점(B')은 반드시 y 축 위에 존재해야함을 알 수 있고, xz 평면상의 점(C)이 x 축으로 정사영 된 점(C')과 이루는 삼각형($\triangle AB'C'$)이 이등변 삼각형임을 알 수 있다.

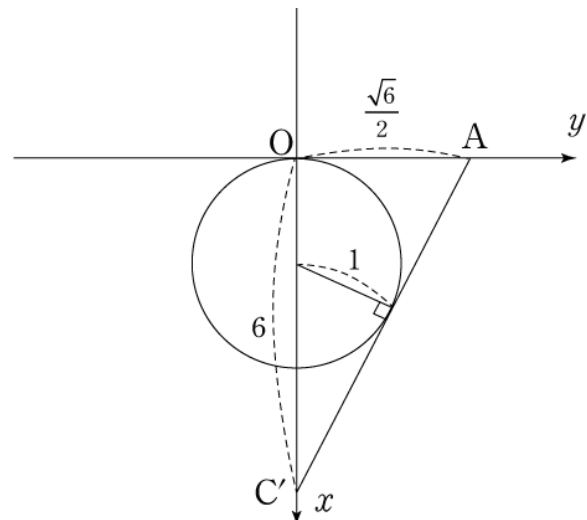
$A(0, t, 0)$, $B(0, -t, a)$, $C(p, 0, q)$ 라고 하자.

문제의 조건 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ 를 통해 점 C의 z 좌표가 $\frac{a}{2}$ 임을 알 수 있다.



위 상황을 그림으로 그리면 다음과 같다.

$\sqrt{4t^2 + a^2} = 4\sqrt{3}$, $\sqrt{t^2 + p^2 + \frac{a^2}{4}} = 4\sqrt{3}$ 두 식을 연립하면 $p=6$ 임을 알 수 있다.



xy 평면상에서 주어진 원을 통해 닮음비를 이용하면

$A(0, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$ 임을 알 수 있으므로 $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 이다.

$\sqrt{4t^2 + a^2} = 4\sqrt{3}$ 식에 t 를 대입해주면 $a^2 = 42$ 임을 알 수 있다.

117.

$$(\vec{ta} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = 0$$

$$(t+2, 2t+1) \cdot (2t+1, 2+t) = 0 \quad (2t+1)(t+2) + (2t+1)(t+2) = 0,$$

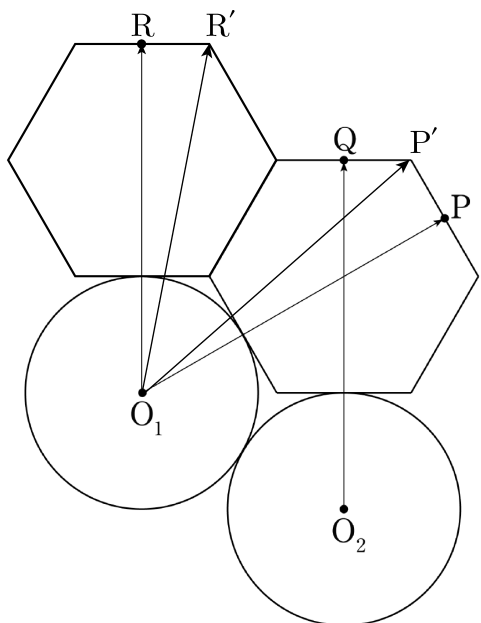
$$(2t+1)(t+2) = 0, \quad \text{따라서 } t = -\frac{1}{2}, -2 \text{이다.}$$

118.

다음 그림과 같이 원 O_1 에 접하고 기존의 정육각형과 한변을 공유하는 정육각형을 새로 그리자. 이 때 새로 생긴 정육각형의 위의 점을 R이라 하면 $\overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{O_1R}$ 이다.

따라서 내적 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_1R}$ 의 최댓값을 구하는 문제와 같다.

정답 및 해설



먼저 점 P를 움직여보면, 그림 상의 고정된 점 R(고정된 것이 아니지만 편의상 일단 그렇게 생각하자.)에 대하여 내적 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_1R}$ 의 최댓값은 점 P가 그림 상의 점 P'에 있을 때 발생한다. 이는 선분 O_1R 에 선분 O_1P 를 정사영 할 때 가장 길이가 긴 것을 찾은 것과 같다.

이제 마찬가지로 고정된 점 P'에 대하여 점 R을 움직여보면 그림 상의 점 R'일 때 내적 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_1R}$ 의 값이 최대가 됨을 알 수 있다. 따라서

$$\overrightarrow{O_1P'} \cdot \overrightarrow{O_1R'} = \sqrt{28} \times \sqrt{28} \times \cos \angle P'O_1R' = \frac{28+28-(2\sqrt{3})^2}{2} = 22$$

[참고]

실은 더 복잡한 과정이 있고, 해설은 직관의 타당성을 설명한 것에 불과하다. 그러나 언제 최대가 되는지 직관적으로 알 수 있으므로, 최대가 되는 상황에서 점을 움직여보면 그 외의 상황은 반드시 최대가 되는 상황보다 내적 값이 작다는 것을 파악할 수 있다. 좀 더 엄밀한 논리를 스스로 전개해보길 권장한다.

119.

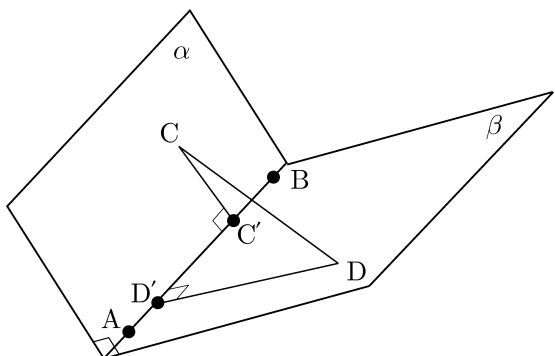
삼각형 ABC의 넓이는 $3 \times \frac{1}{\cos 30^\circ}$ 이므로 점 C에서

선분 AB까지의 거리가 $\sqrt{3}$ 임을 알 수 있다.

삼각형 ABD의 넓이는 $3 \times \frac{1}{\cos 60^\circ}$ 이므로 점 D에서

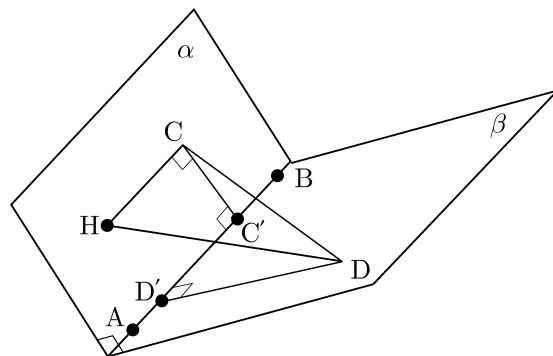
선분 AB까지의 거리가 3임을 알 수 있다.

그런데 평면 $\alpha: y + \sqrt{3}z = 0$ 과 평면 $\beta: \sqrt{3}y - z = 0$ 이 이루는 각의 크기가 90° 이므로 다음 그림과 같은 상황이다.



점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 C'라 할 때 $\overline{CC'} = \sqrt{3}$, 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 D'라 할 때 $\overline{DD'} = 3$, 지금까지의 수직관계에 의해 $\overline{CD}^2 = \overline{CC'}^2 + \overline{DD'}^2 + \overline{C'D'}^2$ 이므로 $\overline{C'D'} = 2$ 이다.

따라서 선분 AB와 선분 CD가 이루는 각의 크기 θ 를 구하기 위하여 선분 $\overline{C'D'}$ 를 평행이동시켜 다음 그림과 같이 점 C'을 점 C와 일치시키고, 점 D'이 이동한 새로운 점을 점 H라 하자.



$\angle CHD = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형 CHD에서 $\cos \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{CD}} = \frac{2}{4}$ 이고,

$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}$ 임을 쉽게 안다.

120.

준선이 x 축과 평행하므로 포물선의 초점 F의 좌표를 (a, b) 라 하면

꼭짓점 Q의 좌표는 $(a, \frac{b+1}{2})$ 이다. 따라서

$$\overline{OF}^2 - \overline{OQ}^2 = b^2 - \frac{b^2 + 2b + 1}{4} = \frac{3b^2 - 2b - 1}{4} \text{의 최솟값은}$$

$b = \frac{1}{3}$ 일 때 $-\frac{1}{3}$ 이다.

121.

$\angle ACP = \angle BCP = 90^\circ$ 를 통해 $\overline{CP}$ 와 평면 α 가 수직임을 알 수 있다.

선분 CP의 길이를 x 라고 하면 삼수선의 정리에 의해 점 P에서 AB에 수선을 내릴 수 있다. P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 선분 PM의 길이는 $\sqrt{7}$ 이므로 피타고라스 정리에 의해 $(\sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + x^2$ 이므로 선분 CP의 길이는 2이다.

따라서 삼각형 ACP의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 이다.

122.

미분가능하므로, $f'(3) = \sqrt{3}$, $f(3) = 2\sqrt{3}$ 이다.

반원 $f(x) = \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$ 에서 $f(3) = \sqrt{r^2 - (3-a)^2} = 2\sqrt{3}$ 이다.

따라서, $(a-3)^2 + 12 = r^2$ 이다.①

또한 $f'(x) = \frac{a-x}{\sqrt{r^2 - (x-a)^2}}$ 에서

$$f'(3) = \frac{a-3}{\sqrt{r^2 - (3-a)^2}} = \sqrt{3} \text{이므로 } (a-3)^2 = 3r^2 - 3(a-3)^2 \text{이다.}$$

(또한 $a-3 > 0$ 에서 $a > 3$ 이다.)

따라서 $\frac{4}{3}(a-3)^2 = r^2$ 이다.②

①과 ②에서 $(a-3)^2 = 36$ 이므로 $a = 9$ 이고 $r^2 = 48$ 이다.

이것을 그래프로 그려보면 다음과 같다.

The graph shows the function $y = 1 - \cos(x)$ on the interval $[0, 2\pi]$. The curve starts at the origin $(0,0)$, reaches a maximum at $(\pi, 2)$, and ends at $(2\pi, 0)$. A tangent line is drawn at the point $(\pi, 2)$, which is the point of maximum value. The x-axis is labeled with $0, 2, 4, 6, 8$, and the y-axis is labeled with $2, 4, 6$.

정답 및 해설

$\triangle OBC$ 와 $\triangle ABC$ 가 이루는 각을 쉽게 구하기 위해 정사영을 이용하고자 하는데 정사영된 $\triangle OBC$ 의 넓이가 필요하다.

따라서 단면으로 그린 그림의 $\overline{HA}$ 길이를 구해야 한다.

$\angle CAH = \alpha$ 라고 하면 $\triangle OAM = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ 이고, $\triangle AOM = \frac{\theta}{2}$ 이다.

$\overline{CH} = 2\sqrt{2}$, $\overline{AC} = 3$ 이므로 $\overline{AH} = 1$ 이고 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ 이다.

$\cos \frac{\alpha}{2} = x$ 라고 하면 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-x^2}$ 이고

$\cos \alpha = \cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}) = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$

$$= x^2 - (1-x^2) = 2x^2 - 1 = \frac{1}{3}$$

이를 통해 $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 임을 알 수 있다.

$\overline{OM} = \sqrt{2}$ 이므로 $\overline{OA} = \sqrt{3}$, $\overline{AM} = 1$ 임을 알 수 있다.

$\triangle ABC$ 로 정사영된 $\triangle OBC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 이다.

다음으로 $\triangle OBC$ 의 넓이를 구해보자

$\overline{MC} = 2$, $\overline{MP} = \frac{4}{3}$, $\overline{PC} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$ 이고, $N=M$ 일 때의 구의 중심

O 에서 선분 CP 에 내린 수선의 발을 Q 라고 하면 직각삼각형의 성질에 의해 $\overline{MQ} \cdot \overline{PC} = \overline{MP} \cdot \overline{MC}$ 이 성립한다.

따라서 $\overline{MQ} = \frac{4}{\sqrt{13}}$ 이고 구의 중심 O 에서 $\overline{CP}$ 에 내린 수선 $\overline{OQ}$ 의

길이는 $\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{13}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{42}{13}}$ 이다.

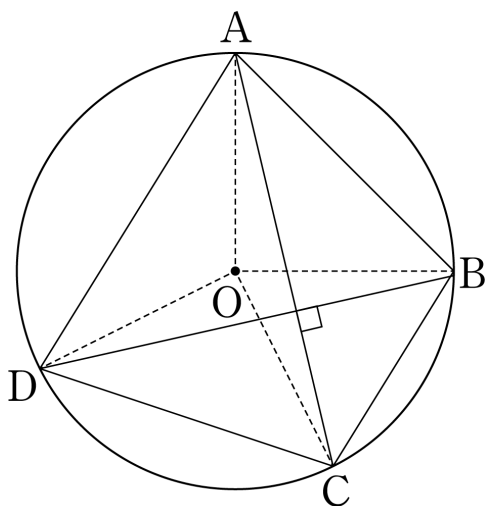
$\triangle OBC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{\frac{42}{13}} = \frac{\sqrt{42}}{2}$ 이다.

이를 통해 $\triangle ABC$ 와 $\triangle OBC$ 가 이루는 각을 θ 라고 하면

$$\frac{\sqrt{42}}{2} \cos \theta = 2 \text{ 이고 } \cos \theta = \frac{4}{\sqrt{42}}$$

구하고자 하는 $40 \tan^2 \theta = 40 \times \frac{26}{16} = 65$ 이다.

128.



$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ 을 통해 $\angle AOB = \angle DOC = 90^\circ$ 임을 알 수 있다.

선분 AC 와 BD 를 이어보자.

$\angle DOC = 90^\circ$ 이므로 원주각에 의해 $\angle DBC = 45^\circ$ 이고,

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 원주각에 의해 $\angle CAB = 45^\circ$ 가 된다.

따라서 두 선분 AC 와 BD 는 직교함을 알 수 있다.

또한 삼각형 AOC 와 삼각형 BOD 는 두 변의 길이가 같고 중심각이 같으므로 합동이다.

따라서 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 이다.

$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 8$, $|\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{BD}|^2 = 64$ 인데

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 이고 $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}| = 4\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

따라서 사각형의 넓이는 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 이므로 $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 16$ 이다.

129.

ㄱ. 점 A 와 B 를 지나는 직선에 수선의 발 H 를 내리면

$\overline{CH} = 2\sqrt{3}$ 이므로 $|\overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 $2\sqrt{3}$ 이다. (거짓)

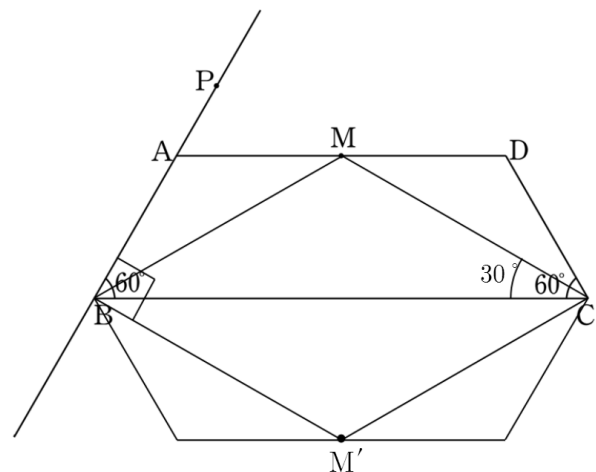
ㄴ. 점 M 에서 직선 BC 에 내린 수선의 발을 H' 이라 할 때,

$\overline{CH} = 3$, $\overline{MH} = \sqrt{3}$, $\overline{MC} = 2\sqrt{3}$ 이므로 $\angle BCM = 30^\circ$ 이다. 선분

CM 과 선분 AB 가 수직이므로 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CP}$ 의 값은 일정하다. (참)

(별해) 선분 AB 와 CD 를 연장해 큰 정삼각형을 그리면 점 M 은 큰 정삼각형의 무게중심이면서 외심, 내심임을 알 수 있다. 꼭지점에서 내심에 그은 선분은 각을 이등분하므로 $\angle BCM = 30^\circ$ 가 성립한다.

ㄷ. 점 M 을 선분 BC 에 대해 대칭시킨 점을 M' 이라 하자.



$\overrightarrow{M'C} = \overrightarrow{BM}$ 이므로 벡터 $\overrightarrow{BM}$ 의 중점 M 을 점 C 로 옮기면

$\overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{M'P}$ 이므로 $|\overrightarrow{M'P}|$ 의 최솟값을 구하면 된다.

$\angle CBM' = 30^\circ$ 이므로 선분 $M'C$ 와 선분 AB 가 수직이고,

$\overline{MC} = \overline{M'C} = 2\sqrt{3}$ 이므로 $|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 $2\sqrt{3}$ 이다. (참)

130.

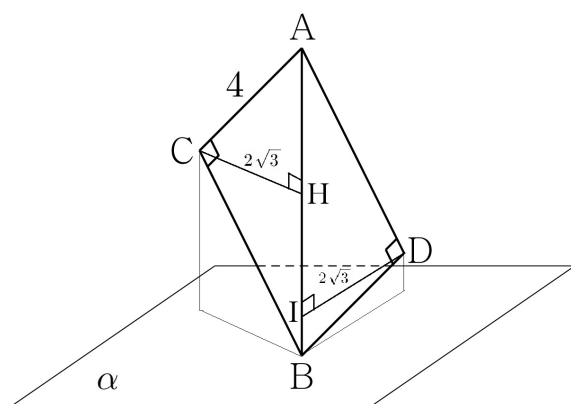
점 C 와 점 D 를 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 C' , D' 이라 하자.

$\overline{BC'} = \overline{BD'}$ 이다. (삼각형 ABC 와 삼각형 ABD 가 합동이므로) 따라서

$\angle B'CD' = 90^\circ$ 이고, $\overline{BC'} = \overline{BD'} = 2\sqrt{3}$ 이다.

그림에 따르면, 직각삼각형들끼리 전부 닮음이므로, $\overline{AH} = \overline{BI} = 2$ 이다.

$\overline{HI} = 4$ 이므로 $\overline{CD}^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 + 4^2 = 40$ 이다.



정답 및 해설

131.

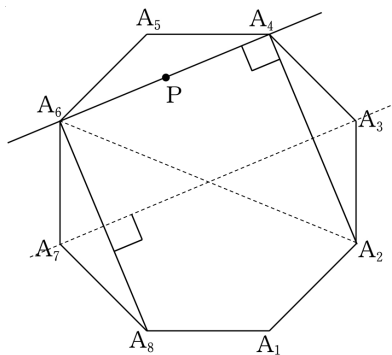
점 A가 x 축 위에 있으므로, A의 좌표는 $(-\sqrt{10}, 0, 0)$ 이다.
따라서 선분 OA의 길이는 $\sqrt{10}$ 이다. 점 O에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\overline{AP}:\overline{AQ}=5:3$ 이므로 $\overline{AH}:\overline{AQ}=1:4$ 이다.
 $\overline{AH}=k$ 라 하면, $\overline{HQ}=4k$ 이다. 따라서
 $\overline{OH}^2=5^2-(4k)^2=(\sqrt{10})^2-k^2$ 이다. 따라서 $15k^2=15$ 이므로
 $k=1$ 이다. $\overline{PQ}=8$ 임을 알 수 있다. 삼각형 PQR은 직각삼각형이므로, 선분 PR의 길이는 6임을 알 수 있다.
(선분 RQ는 지름이므로) 따라서 삼각형 PQR의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ 이다.

132.

ㄱ. 전개도를 접었을 때, 선분 AB의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이고, 선분 BQ의 길이는 $\sqrt{6}$, 선분 AQ의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다. 삼각형 ABQ가 피타고라스의 정리가 성립하므로, 수직이다.
ㄴ. $\overline{BQ}=\overline{PQ}=\sqrt{6}$ 이고 $\overline{BP}=2\sqrt{3}$ 이다. 넓이는 3이다.
ㄷ. 선분 AP와 선분 PQ가 수직이고, 선분 PQ와 선분 BQ가 수직이므로, 두 평면 APQ와 BPQ가 이루는 각의 크기는 선분 BQ와 선분 AP가 이루는 각의 크기이다. 평행이동해보면 참임을 알 수 있다.

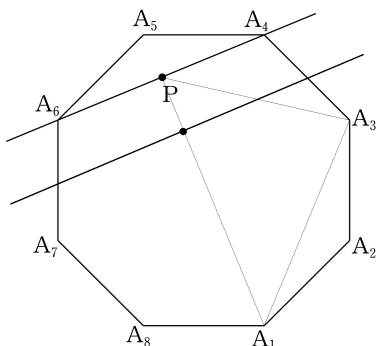
133.

ㄱ. 삼각형 $A_2A_4A_6$ 이 $\overline{A_2A_4}=\overline{A_4A_6}=4$ 인 직각이등변삼각형이므로, $\overline{A_2A_6}=2\sqrt{2}$ 이다. 그러므로 $|\overrightarrow{A_2P}|$ 의 최솟값은 $2\sqrt{2}$ 이다. (참)



ㄴ. 선분 A_1A_5 와 선분 A_4A_6 이 서로 수직이므로 $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{A_1A_5}$ 의 값은 일정하다. (참)

ㄷ. $|\overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{A_7A_5}| = |\overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{A_1A_3}|$ 이다. 두 벡터의 합은 점 A_3 와 점 P의 중점을 지난다. 그 중점의 자취는 다음과 같다.



즉, 점 P를 지나고 평행하면서, 점 A_3 와 점 P의 중점을 지나도록 하는 직선이다. 따라서 최소가 되려면, 직선 A_1A_5 위에 두 벡터의 합의 중점이 놓이는 경우이다. 따라서 점 P가 아닌 바로 아래쪽에 점찍은 부분을 점 Q라 하면, $|\overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{A_7A_5}|$ 의 최솟값은
 $2|\overrightarrow{A_1Q}| = |\overrightarrow{A_1A_5}| + \frac{1}{2}|\overrightarrow{A_2A_4}| = 4 + \sqrt{2}$ 이다. (참)

134.

일단 점 P와 점 Q의 위치관계부터 구하도록 하자. 반지름이 1인 구 위의 점 P, Q에 대하여 $\overline{AP}=\overline{AQ}$ 이고, $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}| = \sqrt{10}$,
 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 2$ 이므로, $|\overrightarrow{AP}|^2 + 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} + |\overrightarrow{AQ}|^2 = 10$,
 $\overline{AP}=\overline{AQ}$ 이므로 $\overline{AP}=\overline{AQ}=\sqrt{3}$, $\overline{PQ}=\sqrt{2}$ 가 성립한다.

$\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 이므로 $\overline{BP}=1$, $\overline{PH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. $\overline{PH}=\overline{QH}$ 이고

$\angle AHP = \angle AHQ = 90^\circ$ 이므로 세 점 P, Q, H를 포함하는 평면은 선분 AH와 수직이다. 따라서 선분 AH를 포함하는 xy 평면과도 수직이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{2}$ 이므로, 점 H에서 선분 PQ에 내린 수선의 발 H_1 에 대하여 $\overline{HH_1}=\frac{1}{2}$ 이다. 평면 PQH가 xy 평면과 수직이므로 선분 PQ가 xy 평면과 만나는 점 R은 평면 PQH를 포함하는 평면과 xy 평면이 만나는 직선 위에 있고, 따라서 선분 PQ와 xy 평면이 이루는 각 θ 는 $\angle H_1HR$ 과 같다.

따라서 $\overline{HR}=\frac{3}{2}$ 이고 $\overline{BH}=\frac{1}{2}$ 이므로 $k=\frac{3}{8}$ 이다.

135.

일단 문제의 상황을 이해하기 위해서는 점 P의 좌표를 구해야 한다. 평면 OAP의 법선벡터를 $(1, p, q)$ 로 놓으면, $\overrightarrow{OA}=(4, 1, -1)$ 과 평면 α 의 법선벡터 $(2, -1, 7)$ 이 전부 평면 OAP의 법선벡터와 수직이므로, $p=-5$, $q=1$ 이 성립한다. 점 P는 구 위에 있고, xz 평면 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, 0, b)$ 로 놓을 수 있고, $a^2+b^2=18$ 이 성립한다. 점 P는 평면 $x-5y-z=0$ 위의 점이므로 $a=3$, $b=3$ 또는 $a=-3$, $b=-3$ 이다.

사면체 OAPQ의 높이를 구하기 위해 점 P와 평면 α 와의 거리를 구하면, 평면 OAP와 평면 α 는 수직이므로 점 P의 평면 α 위로의 수선의 발 H는 직선 OA 위에 있고, $a=3$, $b=3$ 일 때와 $a=-3$, $b=-3$ 일 때 평면 α 와의 거리는 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 으로 동일하다. 사면체 OAPQ의 높이는 일정하므로, 밑면 OAQ의 넓이가 최대일 때 사면체 OAPQ의 부피는 최대가 된다.

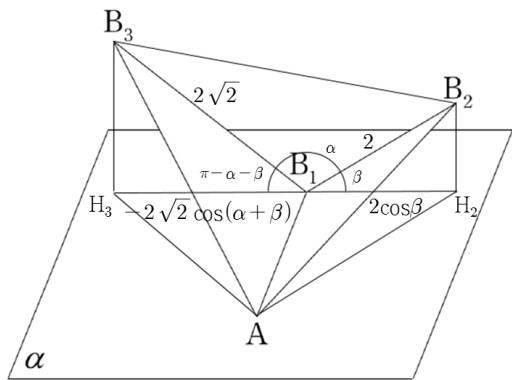
선분 OA와 선분 OQ가 수직일 때 삼각형 OAB의 넓이가 최대가 된다. 선분 OA와 선분 OQ가 수직이고, 점 P의 평면 α 위로의 수선의 발 H가 직선 OA 위에 있으므로, 삼수선의 정리에 의해 선분 OP와 선분 OQ는 수직이다. 따라서 평면 OPQ와 평면 α 가 이루는 각도의 크기는 $\angle POH$ 의 각도의 크기와 같다. 점 P와 평면 α 와의 거리가 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 이므로, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos^2\theta=\frac{1}{4}$ 이 성립한다.

그리고 사면체 OAPQ의 부피의 최댓값 M 은

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{4}$ 이므로, $\frac{M^2}{\cos^2\theta} = 486$ 이 성립한다.

정답 및 해설

136.



공통) 문제의 조건에 의하여 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AB_2}=2\sqrt{2}$ 이고 $\angle AB_1B_2=90^\circ$ 이기 때문에 삼각형 AB_1B_2 는 빗변이 아닌 변들의 길이가 2인 직각이등변삼각형이 된다.

문제에 조건에 의하여 $\overline{AB_3}=2\sqrt{3}$ 이고, B_3 에서 평면 AB_1B_2 에 내린 정사영이 선분 B_1B_2 의 중점 M_1 이다. $\overline{AM_1}=\sqrt{5}$ 이고 선분 B_3M_1 과 평면 AB_1B_2 는 수직이기 때문에 $\overline{B_3M_1}=\sqrt{7}$ 이다.

선분 B_3M_1 과 평면 AB_1B_2 는 수직이고, 선분 AB_1 과 선분 B_1B_2 가 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 선분 B_1B_3 는 선분 AB_1 과 수직이다. 때문에 평면 AB_1B_2 와 평면 AB_1B_3 가 이루는 각이 α 일 때, 이면각의 정의에 의하여 $\angle B_3B_1B_2=\alpha$ 가 성립한다.

선분 B_3M_1 과 평면 AB_1B_2 는 수직이기 때문에 선분 B_3M_1 과 선분 B_1B_2 가 수직이고, 따라서 삼각형 $B_1B_3M_1$ 은 직각삼각형이다.

$\angle B_3B_1B_2=\angle B_3B_1M_1=\alpha$ 이므로, $\cos\alpha=\frac{\overline{B_1M_1}}{\overline{B_1B_3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 이다.

풀이 1) 정사영 이용

문제에 조건은 문제 해결에 정사영을 사용할 것을 암시하고 있다. 정사영을 이용하기 위해, 삼각형 AB_2B_3 를 평면 α 위로 정사영 해보자. 점 A 는 평면 α 위의 점이므로 정사영할 필요가 없고, 점 B_2 의 평면 α 위로의 정사영을 H_2 , 점 B_3 의 평면 α 위로의 정사영을 H_3 라 하자. 그러면 삼각형 AB_2B_3 의 평면 α 위로의 정사영은 AH_2H_3 이다.

그러면 삼각형 AB_2B_3 의 넓이와 삼각형 AH_2H_3 의 넓이의 최댓값을 구하면, 정사영의 정의($\frac{S'}{S}=\cos\theta$)에 의하여 삼각형의 넓이가 최대일 때 평면 AB_2B_3 와 평면 α 가 이루는 이면각의 크기도 구할 수 있다.

일단 삼각형 AB_2B_3 의 넓이를 구하자.

$\overline{AB_2}=2\sqrt{2}$, $\overline{AB_3}=2\sqrt{3}$ 이고, 선분 B_3M 과 선분 B_1B_2 가 수직이기 때문에 삼각형 B_2B_3M 은 직각삼각형이다. $\overline{B_2M}=1$, $\overline{B_3M}=\sqrt{7}$ 이므로 $\overline{B_2B_3}=2\sqrt{2}$ 이다. 따라서 삼각형 AB_2B_3 이 이등변삼각형이므로, 점 B_2 에서 선분 AB_3 에 내린 수선의 발은 선분 AB_3 의 중점 M_2 이고, 선분 AM_2 는 삼각형 AB_2B_3 의 높이가 된다. $\overline{AB_2}=2\sqrt{2}$, $\overline{AM_2}=\sqrt{5}$ 이므로, 삼각형 AB_2B_3 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times \sqrt{5}=\sqrt{15}$ 가 된다.

삼각형 AH_2H_3 의 넓이를 살펴보자. 일단 평면 $B_1B_2B_3$ 의 두 선분 B_1B_3 과 B_1B_2 가 선분 AB_1 과 수직이므로, 선분 AB_1 은 평면 $B_1B_2B_3$ 와 수직이다. 때문에 선분 AB_1 을 포함하는 평면 α 는 평면 $B_1B_2B_3$ 와 수직이다.

(부연설명: 평면 α 와 평면 $B_1B_2B_3$ 의 교선 l 에 대하여 교선 l 은 평면 $B_1B_2B_3$ 위의 선분이므로 선분 AB_1 과 수직이다. 평면 $B_1B_2B_3$ 위에서 B_1 을 지나고 교선 l 과 수직인 직선 m 을 그을 수 있고, 직선 m 은 평면 $B_1B_2B_3$ 위에 있기 때문에 선분 AB_1 과 수직이다. 직선 m 과 선분 AB_1 이 각각 교선 l 과 수직이고, 직선 m 과 선분 AB_1 이 수직이기 때문에 이면각의 정의에 의하여 평면 α 와 평면 $B_1B_2B_3$ 는 수직이다.)

$\overline{AB_1}=2$ 이고, 선분 AB_1 과 평면 $B_1B_2B_3$ 는 수직이기 때문에 평면 $B_1B_2B_3$ 위의 선분인 H_2H_3 은 선분 AB_1 과 수직이다. 때문에 삼각형 AH_2H_3 의 높이는 $\overline{AB_1}$ 이고, 밑변의 길이는 $\overline{H_2H_3}$ 이다.

그런데 평면 α 와 평면 $B_1B_2B_3$ 는 수직이기 때문에, 점 B_2 에서 평면 α 위에 내린 정사영 H_2 , 점 B_3 에서 평면 α 위에 내린 정사영 H_3 에 대하여 점 B_1 , B_2 , B_3 , H_2 , H_3 은 한 평면 위에 있다. 따라서 선분 B_1B_2 와 선분 B_1H_2 가 이루는 각을 β 라 할 때, 선분 B_1B_3 과 선분 B_1H_3 가 이루는 각은 $(\pi-\alpha-\beta)$ 가 된다.

(부연설명 2: 점 B_2 와 H_2 , 평면 α 와 평면 $B_1B_2B_3$ 의 교선 l 에 대하여 이면각의 정의와 삼수선의 정리를 적용하면, 점 H_2 가 교선 l 위에 있고, 동시에 평면 $B_1B_2B_3$ 위에 있음을 알 수 있다. 점 H_3 역시 같은 방법으로 평면 $B_1B_2B_3$ 위에 있음을 보일 수 있다.)

그러면 각각의 값들을 계산하여 풀이를 마무리하자.

$\overline{B_1B_2}=2$ 이므로 $\overline{B_1H_2}=2\cos\beta$, $\overline{B_1B_3}=2\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{B_1H_3}=2\sqrt{2}\cos(\pi-\alpha-\beta)=-2\sqrt{2}\cos(\alpha+\beta)$ 이다.

앞에서 $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ 임을 보였기 때문에

$\overline{B_1H_3}=\sqrt{7}\sin\beta-\cos\alpha$ 이다.

따라서

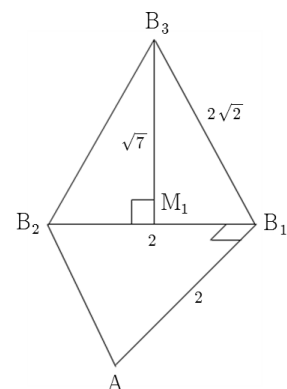
$\overline{H_2H_3}=\overline{H_2A}+\overline{AH_3}=2\cos\beta+(\sqrt{7}\sin\beta-\cos\beta)=\cos\beta+\sqrt{7}\sin\beta$ 가 성립한다.

따라서 삼각형 AH_2H_3 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times (\cos\beta+\sqrt{7}\sin\beta)$ 이므로,

이 식을 미분하여 계산하면 삼각형 AH_2H_3 의 넓이의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

AB_2B_3 의 넓이가 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times \sqrt{5}=\sqrt{15}$, 삼각형 AH_2H_3 의 넓이의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이므로, 평면 AB_1B_3 와 평면 α 가 이루는 각도의 크기 θ 에 대하여 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$, $60\cos^2\theta=60\times \frac{8}{15}=32$ 가 성립한다.

풀이 2) 좌표도입 이용



정답 및 해설

평면 AB_2B_3 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 최대일 때, 삼각형 AB_2B_3 의 넓이는 일정하기 때문에 정사영의 정의에서 $\cos\theta$ 의 값이 가장 커지게 된다. 따라서 $\cos\theta$ 의 최댓값이 답임을 알 수 있다.

법선벡터를 구하기 위해 직교좌표를 도입하도록 하자. 문제의 그림에서 A, B_1, B_2, B_3 을 따로 그려 나타내면 다음과 같다. 선분 AB_1 , 선분 B_1B_2 , 선분 M_1B_3 이 서로 수직이므로 선분 A_1B_1 을 x 축, 점 A 를 지나고 선분 B_1B_2 와 평행한 직선을 y 축, 점 A 를 지나고 선분 M_1B_3 과 평행한 선분을 z 축으로 놓으면 점 A, B_2, B_3 의 좌표를 각각 $(0, 0, 0), (2, 2, 0), (2, 1, \sqrt{7})$ 로 놓을 수 있다.

따라서 A, B_2, B_3 을 지나는 평면의 방정식은 $\sqrt{7}x - \sqrt{7}y - z = 0$ 이 된다. 선분 AB_1 을 포함하는 방정식의 법선벡터 (a, b, c) 는 선분 AB_1 의 벡터인 $(2, 0, 0)$ 과 수직이므로 $(0, b, c)$ 로 놓을 수 있다.

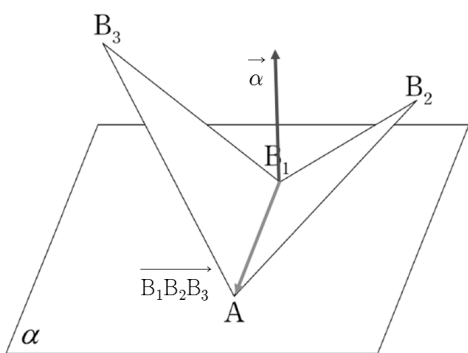
두 벡터를 내적하면 $\sqrt{15}\sqrt{b^2+c^2}\cos\theta = -\sqrt{7}b-c$ 가 된다. 법선벡터의 길이는 두 벡터가 이루는 각에 영향을 미치지 않으므로 편의상 $b^2+c^2=1$ 로 가정하면, $\cos\theta = \frac{-\sqrt{7}b-c}{\sqrt{15}}$ 가 된다. $\cos\theta$ 의 최댓값을 구하는 것이 문제의 목표이고, $\sqrt{7}b+c$ 가 최솟값을 가질 때 $\cos\theta$ 가 최대가 되므로 $\sqrt{7}b+c$ 의 최솟값을 구하도록 하자.

$\sqrt{7}b+c=k$ 일 때 k 의 최솟값을 구하기 위해, 이 식을 $b^2+c^2=1$ 에 대입한다. 식을 c 에 대해 정리했을 때 이 식을 만족시키는 c 의 값이 존재하기 위해서는 $D \geq 0$ 이어야 한다. 판별식에 넣고 식을 정리했을 때 $-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{7}b+c$ 의 최솟값은 $-2\sqrt{2}$ 이다. (부연설명 3: 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 k 의 최솟값을 구할 수도 있다.) 따라서 $\cos\theta$ 의 최댓값은 $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$, $60\cos^2\theta = 32$ 이다.

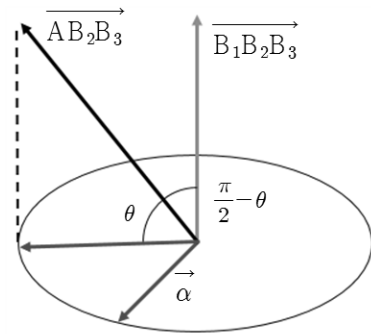
풀이 3) 법선벡터의 회전 이용

$0 \leq \theta \leq \pi$ 에서 $\cos\theta$ 의 값이 커질수록 θ 의 값은 작아지므로, 정사영의 넓이의 최댓값을 구하는 것은 두 평면이 이루는 각도의 최솟값을 구하는 것과 동일하다. 따라서 평면 AB_2B_3 와 평면 α 의 법선벡터가 이루는 각도의 최솟값을 구하면 문제를 풀 수 있다.

다만 우리는 평면 α 와 평면 AB_2B_3 의 법선벡터의 관계를 직접 구하기는 어렵다. 그렇지만 평면 α 와 평면 $B_1B_2B_3$, 평면 $B_1B_2B_3$ 와 평면 AB_2B_3 의 법선벡터의 관계를 각각 구하는 것은 어렵지 않다. 그러므로 일단 평면 α 의 법선벡터를 구하기 전에 각각의 평면들의 관계를 살펴보자. 일단 평면 $B_1B_2B_3$ 의 두 선분 B_1B_3 과 B_1B_2 가 선분 AB_1 과 수직이므로, 선분 AB_1 은 평면 $B_1B_2B_3$ 와 수직이다.



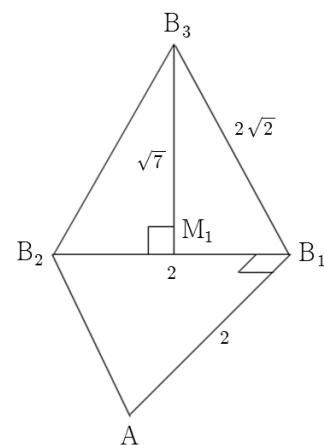
따라서 평면 α 의 법선벡터는 선분 AB_1 과 수직이고, 평면 $B_1B_2B_3$ 는 선분 AB_1 과 수직이기 때문에 선분 AB_1 은 평면 $B_1B_2B_3$ 의 법선벡터가 되고, 그 관계는 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다. 따라서 평면 α 와 평면 $B_1B_2B_3$ 의 법선벡터는 서로 수직이다.



평면 α 와 평면 $B_1B_2B_3$ 의 법선벡터가 수직인 상태에서 평면 α 의 법선벡터가 $B_1B_2B_3$ 와 수직인 평면에 포함되는 원 위를 회전하고 있고, 평면 $B_1B_2B_3$ 와 평면 AB_2B_3 의 법선벡터가 이루는 각은 일정하다. 때문에 각각의 법선벡터가 이루는 관계는 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.

평면 AB_2B_3 와 평면 α 의 법선벡터가 이루는 각도가 최소가 될 때는 평면 α 의 법선벡터의 종점과 평면 AB_2B_3 의 법선벡터의 종점과의 거리가 최소가 될 때이므로, 평면 α 의 법선벡터가 AB_2B_3 의 법선벡터의 원 위로의 정사영을 지날 때 두 벡터가 이루는 각이 최소가 된다. (이에 대한 자세한 내용은 포카칩의 <공간도형과 회전>을 참고하기 바람.)

이 때 α 의 법선벡터, $B_1B_2B_3$ 의 법선벡터, AB_2B_3 의 법선벡터는 한 평면 위에 있고, 평면 α 와 평면 $B_1B_2B_3$ 의 법선벡터가 수직이므로 평면 α 와 평면 AB_2B_3 의 법선벡터가 이루는 각 θ 에 대하여 평면 $B_1B_2B_3$ 와 평면 AB_2B_3 의 법선벡터가 이루는 각은 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 가 된다.



법선벡터가 이루는 각과 평면이 이루는 각은 서로 같기 때문에, 평면 $B_1B_2B_3$ 와 평면 AB_2B_3 가 이루는 각 역시 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 이다. 따라서 평면 $B_1B_2B_3$ 와 평면 AB_2B_3 가 이루는 각도를 구해 θ 를 구할 수 있다.

일단 선분 AB_1 과 평면 $B_1B_2B_3$ 는 서로 수직이므로, 점 A 에서 평면 $B_1B_2B_3$ 에 내린 정사영은 점 B_1 이다. 점 B_1 에서 선분 B_2B_3 에 내린 수선의 발 H 를 구하면, 이면각의 정의에 의해 선분 AH 와 선분 B_1H 가 이루는 각이 두 평면이 이루는 이면각과 같음을 알 수 있다.

$\overline{B_2B_3} = 2\sqrt{2}$ 이고 선분 B_1H 는 삼각형 $B_1B_2B_3$ 의 높이이므로,

$\overline{B_1H}$ 는 $\frac{1}{2} \times \overline{B_1B_2} \times \overline{M_1B_3} = \frac{1}{2} \times \overline{B_2B_3} \times \overline{B_1H}$ 를 통해 구할 수 있다.

$\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \overline{B_1H}$ 이므로, $\overline{B_1H} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{HB_1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ 이므로, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$,

$60\cos^2\theta = 32$ 가 성립한다.